



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna | Austria

Small Review of Physics

Collection of My Favourite Physics Materials

MARKUS DOPPLER

Special thanks to my family and friends who brought me back to the real world whenever I was immersed into my physics materials for too long.

October 2013 - April 2020

Inhaltsverzeichnis

I	Fächer	2
1	Lineare Algebra	2
1.1	Matrizen	2
1.1.1	Aufbau	2
1.1.2	Besondere Matrizen	2
1.1.3	Quadratische Matrix	4
1.1.4	Reguläre Matrix = invertierbare Matrix	4
1.1.5	Normale Matrix	4
1.1.6	Symmetrische Matrix	4
1.1.7	Hermitesche Matrix	4
1.1.8	Antisymmetrische (schiefsymmetrische) Matrix	4
1.1.9	Antihermitesche Matrix	4
1.1.10	Positiv definite Matrix	4
1.1.11	Orthogonale Matrix	5
1.1.12	Unitäre Matrix	5
1.1.13	Projektionsmatrix	5
1.1.14	Nilpotente Matrix	5
1.2	Multiplikation von Matrizen	6
1.3	Rechenregeln	6
1.4	Diagonalisieren einer Matrix	7
1.5	Invertieren einer Matrix	7
1.5.1	Rechenregeln	8
1.5.2	Lösung eines Gleichungssystems	8
1.6	Determinanten	8
1.6.1	Laplace'scher Entwicklungssatz	8
1.7	Spurbildung	9
1.8	Lineare Abbildungen	9
1.9	Euklidische Vektorräume	9
1.10	Das Eigen(wert)problem	10
1.11	Transformationen	10
1.11.1	Ähnlichkeitstransformation	10
1.11.2	Unitäre Transformation	10
2	Analysis	11
2.1	Summenformeln	11
2.2	Hyperbolic functions	11
2.3	Uneigentliche Integrale	11
2.4	Vektoranalysis	12
2.4.1	Kurvenintegral	12
2.5	Komplexe Integration	13
2.5.1	Lösung von Integralen ohne Residuensatz	13
2.5.2	Cauchy'scher Integralsatz	13
2.5.3	Laurent Reihe	13
2.5.4	Cauchy'scher Residuensatz	13
2.5.5	Residuum an Polstelle m -ter Ordnung berechnen	13
2.5.6	Anwendungen des Residuensatzes	14
2.6	Räume	16
2.6.1	Vektorraum	16
2.6.2	Euklidischer Raum	16

2.6.3	Banachraum	16
2.6.4	Hilbertraum	16
3	Mathematische Methoden der Theoretischen Physik	17
3.1	Index Notation	17
3.1.1	Vectors	17
3.1.2	Matrices	17
3.1.3	Kronecker Delta	17
3.1.4	Levi-Civita Symbol	18
3.1.5	Einstein Summation Convention	18
3.1.6	Operations in Index Notation	19
3.1.7	Basis Transformation	19
3.1.8	3 Dimensions	20
3.1.9	3+1 Dimensions	21
3.1.10	Symmetry	21
3.2	Arbitrary Dimensions	22
3.2.1	Kronecker Delta	22
3.2.2	Levi-Civita symbol	22
3.2.3	Determinant	22
3.3	Fourier Transformation	23
3.3.1	Spezialfall 1D	23
3.4	Green'sche Funktionen	24
3.4.1	Green'sche Funktion durch Spektralzerlegung	24
3.4.2	Green'sche Funktion durch Fourier Analyse	24
3.4.3	Umgebungsvorschriften für Greenfunktionen	25
3.5	Delta Distributions / Functions	26
3.6	Theta function / Heaviside step function	26
4	Klassische Mechanik	27
4.1	Kinematik	27
4.1.1	Orthogonale Gruppe $SO(3)$	27
4.2	Lagrange-Formalismus	27
4.2.1	Euler-Lagrange Gleichungen	27
4.3	Hamilton Formalismus	27
4.3.1	Hamiltonisches Extremalprinzip	27
4.3.2	Hamilton Gleichungen	28
4.3.3	Zwangsbedingungen	28
4.4	Variationsrechnung	28
4.4.1	Variation der Wirkung	29
4.5	Poisson Brackets	29
4.6	Hamilton Jacobi Equation	29
4.7	Noether Theorem	29
4.8	Perturbation Theory	29
4.9	Kanonische Transformation	29
4.10	Legendre Transformation	29
4.11	Dictionary - Lexicon	30
4.12	Hydro/Fluid mechanics	30
4.12.1	Kontinuitätsgleichung	30

5	Statistical Mechanics	31
5.1	Ensembles	31
5.2	Virial Theorem	31
5.3	Verteilungsfunktionen	32
5.4	Sommerfeld Entwicklung	32
5.5	Korrelationsfunktion	32
6	Elektrodynamik	33
6.1	Elektrostatik	33
6.1.1	Poisson Gleichung	33
6.1.2	Laplace Gleichung	33
6.1.3	Satz von Gauß	33
6.1.4	Satz von Stokes	33
6.2	Maxwell equations	33
6.3	Eichungen	33
6.4	Spezielle Relativitätstheorie	34
6.4.1	Lorentz Transformation	34
6.5	Time-like / space-like / light like	34
6.5.1	Space-like separation	34
6.5.2	Time-like separation	34
6.5.3	Light-like separation	34
6.6	Feldtheorie	35
6.6.1	Lagrange Formalismus	35
6.6.2	Kontinuitätsgleichung	35
6.6.3	Spontane Symmetriebrechung	35
6.7	Pole prescriptions	36
7	Quantenmechanik	37
7.1	Axiome der Quantenmechanik	37
7.2	Schrödinger Gleichung	37
7.3	Dirac Schreibweise	38
7.3.1	Vollständige Eins	38
7.3.2	Scalar product, Projektion (Braket)	38
7.3.3	Komplex Konjugiert	38
7.3.4	Hermiteisch Konjugiert	38
7.3.5	Erwartungswert	38
7.3.6	Matrixelement	38
7.3.7	Transformationen	38
7.3.8	Mehrere Komponenten	38
7.4	Operatoren der Quantenmechanik	39
7.5	Symmetrien in der Quantenmechanik	39
7.5.1	Parität	40
7.5.2	Erhaltungsgröße	40
7.6	Streuprobleme	41
7.7	Messungen	41
7.7.1	Wahrscheinlichkeitsmessung	41
7.7.2	Erwartungswerte quantenmechanischer Observablen	41
7.7.3	Ehrenfest Theorem	41
7.7.4	Projektionsoperator	41
7.8	Dichteoperator	43
7.8.1	Basiswechsel zwischen Koordinatensystemen	43
7.9	Harmonischer Oszillator	44
7.9.1	Kommutator Algebra	44

7.9.2	Drehimpuls	44
7.10	Spin	44
7.10.1	Kopplung von Drehimpulsen	44
7.11	Darstellungstheorie	45
7.11.1	Darstellungswechsel	45
7.12	Transformationsmatrix U zwischen Darstellungen	46
7.12.1	Evolutionsoperator	46
7.13	Bilder der Quantenmechanik	47
7.14	Entanglement	48
7.14.1	Kriterium für Verschränktheit	48
7.14.2	Reduzierte Dichtematrix	48
7.15	Störungstheorie	49
7.15.1	zeitunabhängige (nicht entartete) Störungstheorie	49
7.15.2	zeitunabhängige (entartete) Störungstheorie	49
7.15.3	time-dependent perturbation theory	49
7.16	Matrizen	50
7.16.1	Eigenschaften von Operatoren / Matrizen	50
7.16.2	Matrizenrechenregeln	50
7.16.3	Matrixexponential eines Operators	50
7.16.4	Spektralsatz	51
7.16.5	Pauli Matrices	51
7.16.6	Parity transformations	52
II Standard Model of Particle Physics		53
8	Quantenfeldtheorie	54
8.1	Second quantization	54
8.1.1	momentum space	54
8.1.2	LSZ formula	55
8.2	FEYNMAN Diagrams	55
8.2.1	FEYNMAN rules in momentum space	55
8.2.2	Regularization	55
8.2.3	Renormalization schemes	56
8.3	Beta function	56
8.4	Lagrangians	56
8.5	Eichfeldtheorien	57
8.6	Quantum statistical mechanics	58
8.7	Propagators	59
9	Path integrals	60
9.1	Grassmann variables	61
9.2	Functional determinants	62
9.3	Gauge fixing	63
10	QED	64
10.1	Relativity	64
10.1.1	KLEIN-GORDON Equation	64
10.2	DIRAC Gleichung	64
10.2.1	Gamma Matrizen	64
10.2.2	DIRAC Matrizen	65
10.2.3	WEYL equation	65
10.3	Electrodynamics	66
10.4	Coupling the Dirac field to electrodynamics	66

10.4.1	Noether Current	66
10.5	Group theory knowledge for QED	67
11	QCD	68
11.1	Eichtransformationen	68
11.1.1	Eichsymmetrien	68
11.2	Glukonen und Quarks	69
12	Gruppentheorie	70
12.1	Gruppen	70
12.1.1	Abbildungen zwischen Gruppen	70
12.1.2	Wirkung und Darstellung	70
12.2	LIE-Gruppe	71
12.3	LIE-Algebra	71
12.3.1	Generatoren	71
12.3.2	Kommutatorrelation	71
12.3.3	(Lie-)Algebra	71
12.3.4	Quaternionen	71
12.3.5	Spezielle Gruppen und Algebren	72
12.4	Gruppe aus Algebra	72
12.4.1	Exponentiation von Matrizen	72
12.4.2	Baker-Campell-Hausdorff Formel	72
12.5	Produkte von Gruppen	73
12.5.1	Kartesisches Produkt	73
12.5.2	Direktes Produkt	73
12.5.3	Direkte Summe	73
12.5.4	Tensorprodukt	73
12.6	Darstellungstheorie	74
12.7	SO(n)	75
12.7.1	Fundamental (or Defining) Representation	75
12.7.2	Reducible Representation Example	75
12.7.3	Naming conventions for representations	75
12.7.4	Algebra	76
12.8	SU(n)	77
12.8.1	Fundamental (or Defining) Representation	77
12.8.2	Irreducible Representations of SU(n)	77
12.8.3	Naming conventions	77
12.8.4	Algebra	78
12.8.5	Multiplying representations together	81
12.8.6	Restriction to subgroup	81
13	Topologie	82
14	(Differential) Geometry	83
14.1	Riemannsche Mannigfaltigkeit	83
15	General Relativity	84
III	Grand Unified Theories	85
16	Fundamental Physics	85

IV	Anhang	86
A	Important topics	86
A.1	Solving Differential equations	86
A.1.1	Integrating Factor	86
A.1.2	Trennung der Variablen	86
A.2	Hilfreiche Integrale	87
A.2.1	Integration Path	87
A.2.2	Partielle Integration	87
A.2.3	Winkelintegral	87
A.2.4	Gerade und ungerade Funktionen	87
A.2.5	Integral über Gauß-Funktionen	88
A.2.6	Gamma Funktion $\Gamma(x)$	88
A.2.7	Formel von Stirling	88
A.2.8	Riemann Zeta Funktion $\zeta(z)$	88
A.3	Volumen und Oberfläche einer D-dimensionalen Kugel	88
B	Taylor series expansions	89
C	Important Derivatives	89
D	Kugelkoordinaten	91
D.1	Definition	91
E	Zylinderkoordinaten	93
E.1	Definition	93
F	Polarkoordinaten	95
F.1	Definition	95
G	Trigonometrische Identitäten	96
G.1	Product-to-Sum Formulas	96
G.2	Power-Reducing / Half Angle Formulas	96
G.3	Double Angle Formulas	96
H	Spezielle Funktionen	97
H.0.1	Entwicklung nach vollständigen Funktionensystemen	97
H.1	Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)	97
H.2	Legendre Funktionen / -polynome	97
I	Fun with Definitions	98
I.1	Morphisms	98
I.2	Holonomy	99
I.3	Homology	99
I.4	Cohomology	99
I.5	Homotopy	99
J	Abbreviations	100

Teil I

Fächer

1 Lineare Algebra

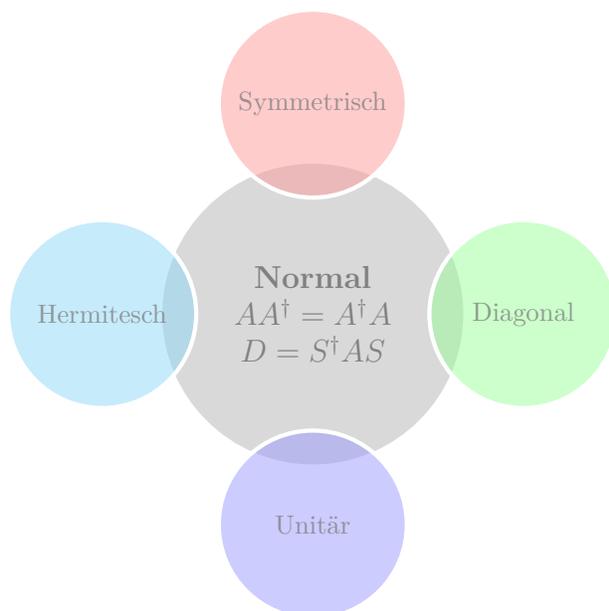
1.1 Matrizen

1.1.1 Aufbau

Element a_{ij} mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ — “Zuerst das Stockwerk dann die Tür.”

Spur = trace
Rang = rank
Kern = kernel

1.1.2 Besondere Matrizen



Quadratisch
 $n \times n$ -Matrix
Diagonalisierbar (diagonalähnlich)
 $D_A = S^{-1}AS$
Normal
 $AA^\dagger = A^\dagger A$
 $D = S^\dagger AS$
Symmetrisch
 $A^T = A$
Hermitesch (selbstadjungiert)
 $A^\dagger = A$
Orthogonal
 $A^T = A^{-1}$
Unitär
 $A^\dagger = A^{-1}$
Diagonal
 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Blockdiagonal
Regulär (invertierbar)
 $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_n$

Selbstinvers

$$A^{-1} = A$$

Idempotent

$$A^2 = A$$

Nilpotent

$$A^k = 0$$

symmetrisch & reell

Eigenwerte reell

symmetrisch, reell & positiv definit

Eigenwerte reell und positiv

1.1.3 Quadratische Matrix

Nicht zu jeder quadratischen Matrix existiert eine Inverse. Eine quadratische Matrix, die keine Inverse besitzt, wird singuläre Matrix genannt.

1.1.4 Reguläre Matrix = invertierbare Matrix

⊂ quadratische Matrix

Es existiert eine Inverse

$$AA^{-1} = \mathbb{1}_n$$

1.1.5 Normale Matrix

$$A^\dagger A = AA^\dagger$$

Spektralsatz: eine Matrix A ist genau dann normal, wenn es eine unitäre Matrix U gibt, so dass $A = UDU^\dagger$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

unitär diagonalisierbar: Es existiert also eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A . Die Hauptdiagonalelemente von D sind genau die Eigenwerte von A .

1.1.6 Symmetrische Matrix

⊂ normale Matrix

$$A^T = A$$

1.1.7 Hermitesche Matrix

⊂ normale Matrix

$$A^\dagger = A$$

hermitesch oder selbstadjungiert

1.1.8 Antisymmetrische (schiefsymmetrische) Matrix

$$A^T = -A$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, müssen alle Einträge der Hauptdiagonale den Wert Null haben. Die restlichen Werte werden an der Hauptdiagonale gespiegelt und mit -1 multipliziert.

1.1.9 Antihermitesche Matrix

$$A^\dagger = -A$$

Bemerkung: Wenn man eine antihermitesche Matrix A mit der komplexen Einheit multipliziert, bekommt man eine hermitesche Matrix H

$$H = iA = (-i)(-A) = -iA^\dagger = H^\dagger.$$

1.1.10 Positiv definite Matrix

Positiv definite Matrizen definieren verallgemeinerte Skalarprodukte.

1.1.11 Orthogonale Matrix

Spiegelungen, Drehungen und Drehspiegelungen

die zugehörige lineare Abbildung erhält das Standardskalarprodukt

$$A^T = A^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad AA^T = A^T A = I_n$$

$$\det A = \pm 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\lambda_i| = 1$$

A^T , A^{-1} , AB sind auch orthogonal

1.1.12 Unitäre Matrix

\subset normale Matrix die zugehörige Transformation erhält die Normierung

$$A^\dagger = A^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad AA^\dagger = A^\dagger A = I_n$$

Fasst man den n -dimensionalen komplexen Vektorraum als $2n$ -dimensionalen reellen Vektorraum auf, so entsprechen die unitären Matrizen genau denjenigen orthogonalen Matrizen, die mit der Multiplikation mit i vertauschen.

Bemerkung Jede unitäre Matrix U kann als $U = e^{iH}$ (mit $H = H^\dagger$ hermitesch und spurlos) geschrieben werden.

1.1.13 Projektionsmatrix

$$A^2 = A$$

Eine idempotente Matrix hat keinen vollen Rang, es sei denn, sie ist die Einheitsmatrix.

$$\text{tr}(A) = \text{rk}(A)$$

1.1.14 Nilpotente Matrix

$$A^k = 0$$

nilpotent, falls eine Potenz A^k (und damit auch jede höhere Potenz) die Nullmatrix ergibt

Diagonalmatrix
Eigenwerte = Diagonalelemente $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ $\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
Symmetrische Matrix
$A^T = A$ Reell Eigenwerte reell Eigenvektoren orthogonal diagonalisierbar $\text{diag}(-\lambda_i)$ orthonormale Eigenbasis Positiv definit Eigenwerte reell & positiv
Reguläre Matrix
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ Invertierbar = voller Rang $\det A \neq 0$
Orthogonale Matrix
$A^T = A^{-1}$ $AA^T = A^T A = I_n$ $\det A = \pm 1$ $ \lambda_i = 1$ A^T, A^{-1}, AB sind auch orthogonal

1.2 Multiplikation von Matrizen

Aus dem Produkt einer $k \times m$ -Matrix mit einer $m \times n$ -Matrix ergibt sich eine $k \times n$ -Matrix (i.e. $(3 \times 4)(4 \times 2) = (3 \times 2)$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Dabei ist das Element $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$. In Indexnotation sieht das Ganze wie folgt aus.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk} \quad (1.2)$$

1.3 Rechenregeln

Transponierte

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (sA)^T &= sA^T \end{aligned}$$

Komplex konjugieren

$$(AB)^* = A^* B^*$$

Hermitesch adjungieren

$$A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(sA)^\dagger = s^* A^\dagger$$

1.4 Diagonalisieren einer Matrix

Eine Matrix A ist *diagonalisierbar*, wenn folgende äquivalente Fälle eintreten:

- A ist diagonalähnlich, dh. sie kann durch die Ähnlichkeitstransformation $TAT^{-1} = D$ dargestellt werden
- A besitzt eine Eigenbasis
- Für jeden Eigenwert λ_i der Matrix ist die algebraische gleich der geometrischen Vielfalt. Das heißt, falls Eigenwerte degenerieren, muss es genau so viele linear unabhängige Eigenvektoren geben.

Zwei Matrizen A und B sind *gleichzeitig diagonalisierbar*, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt, dh. wenn sie miteinander kommutieren:

$$[A, B] = 0$$

1.5 Invertieren einer Matrix

Eine Matrix ist invertierbar, wenn einer der folgenden (äquivalenten) Fälle eintritt:

- $\text{Rang}(A) = n$
- $\det A \neq 0$
- ... siehe Prüfungssammlung

Inverse einer 2x2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Inverse einer 3x3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $\det A_{ij}$ die Determinante der 2×2 Untermatrix A_{ij} , die entsteht, wenn man die i -te Zeile und die j -te Spalte der Matrix A streicht.

$$\longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix}^\top \quad (1.4)$$

Invertieren einer allgemeinen Matrix (Gauß-Jordan-Verfahren) Die erweiterte Matrix wird analog dem Gauß-Algorithmus gelöst. Man erhält die Inverse auf der rechten Seite der erweiterten Matrix.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauß-Elimination}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) \quad (1.5)$$

Inverse einer Diagonal-Matrix Eine Diagonalmatrix ist genau dann invertierbar, wenn keiner der Einträge auf der Hauptdiagonale 0 ist. Die inverse Matrix berechnet sich dann wie folgt:

$$\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_n^{-1})$$

1.5.1 Rechenregeln

Inverse

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \end{aligned}$$

Transponierte

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (sA)^T &= sA^T \end{aligned}$$

Transponierte der Inversen $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$

1.5.2 Lösung eines Gleichungssystems

Ein (quadratisches) *inhomogenes Gleichungssystem* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn A *regulär*, dh. $\det A \neq 0$ ist.

Ein *homogenes Gleichungssystem* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat genau dann eine nicht triviale Lösung, wenn A *singulär* bzw. $\det A = 0$ ist.

1.6 Determinanten

Rechenregeln für $n \times n$ Matrizen

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \det(A) \text{ (Transponierte Matrix)} \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1} \text{ (falls } A \text{ invertierbar ist)} \\ \det(A \cdot B) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ \det(A) &= \det(X^{-1}BX) = \det(B) \text{ (Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante)} \\ \det(rA) &= r^n \det(A) \end{aligned}$$

1.6.1 Laplace'scher Entwicklungssatz

Entwicklung nach der k-ten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \tag{1.6}$$

Entwicklung nach der l-ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il} \tag{1.7}$$

Es empfiehlt sich immer nach einer Zeile/Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nuller enthält.

1.7 Spurbildung

Rechenregeln

$$\operatorname{tr}(rA + sB) = r \cdot \operatorname{tr}(A) + s \cdot \operatorname{tr}(B)$$

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$$

$$\operatorname{tr}(A \cdot B \cdot C) = \operatorname{tr}(C \cdot A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot C \cdot A) \text{ (Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen)}$$

$\operatorname{tr}(B^{-1} \cdot A \cdot B) = \operatorname{tr}(A)$ (zueinander ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur \Rightarrow Die Spur ist somit invariant unter Basistransformationen.)

$$\operatorname{tr}(\text{symmetrisch} \times \text{antisymmetrisch}) = 0$$

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) \text{ (für reelle oder komplexe } n \times n\text{-Matrix } A)$$

$$\operatorname{tr}(\ln A) = \ln(\det A) \text{ (für jede diagonalisierbare reelle Matrix } A)$$

1.8 Lineare Abbildungen

Surjektiv (*onto*) Jedes Element des Zielraumes wird angenommen (durch die Abbildung eines oder mehrerer Elemente des Urtraumes).

Injektiv (*one-to-one*) $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}_1) \neq \varphi(\mathbf{x}_2)$ Kern(φ) = $\mathbf{0}$

Bijektiv surjektiv + injektiv

Matrixdarstellung linearer Abbildungen bezüglich beliebiger Basen Sei $\varphi : V \rightarrow W$, B eine Basis von V und C eine Basis von W .

$$[\varphi(\mathbf{v})]_C = \underbrace{[\varphi]_{C \leftarrow B}}_{\text{Matrix}} \cdot [\mathbf{v}]_B \quad (1.8)$$

Umrechnung von Koordinatenvektoren bei Basiswechsel Sei T die Transformationsmatrix zum Basiswechsel $B \rightarrow C$.

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \underbrace{T_{B' \leftarrow B}}_{=(T_{B \leftarrow B'})^{-1}} \cdot [\mathbf{v}]_B \quad (1.9)$$

Umrechnung der Matrixdarstellung bei Basiswechsel Seien B, B' Basen von V und C, C' Basen von W .

$$[\varphi(B')]_{C'} = S_{C' \leftarrow C} \cdot [\varphi(B)]_C \cdot T_{B \leftarrow B'} \quad (1.10)$$

1.9 Euklidische Vektorräume

Euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum, auf dem ein reelles inneres Produkt definiert ist.

Chauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad (1.11)$$

Dreiecksungleichung

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 \quad (1.12)$$

Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{w}_2 = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{w}_3 = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3 \quad (1.15)$$

Durch anschließendes Normieren erhält man orthonormale Basisvektoren \mathbf{b}_i .

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|_2} \quad (1.16)$$

Unitärer Vektorraum ist ein Vektorraum, auf dem ein komplexes inneres Produkt definiert ist.

1.10 Das Eigen(wert)problem

Ein Eigenwertproblem hat folgende Form, wobei \mathbf{v} der Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. Der Eigenvektor \mathbf{v} wird durch die (quadratische, reelle oder komplexe) Matrix A auf ein Vielfaches von ihm abgebildet.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (1.17)$$

Die Eigenwerte λ lassen sich mithilfe des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ finden.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_i \quad (1.18)$$

Um dann den Eigenvektor v_i zum Eigenwert λ_i zu bekommen, muss man das folgende Gleichungssystem lösen.

$$\begin{pmatrix} & & \\ A - \lambda_i I & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ x_i \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ 0 \\ | \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Hauptwerte bestimmen bei gleichen Eigenwerten -> Definition (anschaulich): Algebraische = geometrischer Vielfachheit => Unterraum l.u. Vektoren aufgespannt
alg \neq geom \Rightarrow Hauptvektoren

1.11 Transformationen

1.11.1 Ähnlichkeitstransformation

$$SXS^{-1} = Y \quad (1.20)$$

similarity transformation

Mittels einer Ähnlichkeitstransformation kann eine reguläre Matrix in Diagonalform gebracht werden.

$$TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (1.21)$$

wobei

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T^{-1} = T^\dagger = \begin{pmatrix} -\mathbf{v}^1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}^n- \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

mit den Eigenvektoren \mathbf{v}_i als Spalten bzw. Zeilen.

1.11.2 Unitäre Transformation

Eine unitäre Transformation erhält Ortho-Normalität der Basis.

$U\varphi U^\dagger$ erhält die Hermitizität der Matrix $\varphi = \varphi^\dagger$, dh. $U\varphi U^\dagger$ ist wieder hermitesch.

übernehmen von Quantenmechanik

2 Analysis

2.1 Summenformeln

$$\sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^n n = n^2$$

Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für alle } q \neq 1$$

Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.2 Hyperbolic functions

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = \sqrt{0}/2 = \cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \sqrt{1}/2 = \cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \sqrt{4}/2 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

2.3 Uneigentliche Integrale

Hauptwert?

2.4 Vektoranalysis

2.4.1 Kurvenintegral

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

→ Praktische Mathematik I
(2.1)

Die Funktion $f(z)$ ist parametrisiert mit dem Parameter $t \in [a, b]$.

2.5 Komplexe Integration

→ Analysis II
S. 160-190

2.5.1 Lösung von Integralen ohne Residuensatz

Sei $f(z)$ eine rationale Funktion. Dann lässt sich das Kurvenintegral

$$\oint_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

mithilfe eines Kreises vom Radius r um den Mittelpunkt z_0 lösen.

→ Methoden
S. 129-144

→ Theoretische Physik
S. 450-456

1. Partialbruchzerlegung
2. Lösen des Integral mit der Substitution $z \mapsto z_0 + r e^{i\varphi}$
3. Mittels der Formel für ein Kurvenintegral (2.1) und der Parametrisierung $z(\varphi) = z_0 + r e^{i\varphi}$

2.5.2 Cauchy'scher Integralsatz

Funktion f differenzierbar in einfach zusammenhängendem Gebiet B . → Es gilt für stückweise glatte, ganz in B verlaufende, geschlossene Kurve (im **mathematisch positiven Sinn** durchlaufen).

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Cauchy'scher Integralformel (Spezialfall von (2.2))

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Cauchy'scher Ableitungsformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

2.5.3 Laurent Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

2.5.4 Cauchy'scher Residuensatz

Vorraussetzung: z_k ... **isolierte** Singularitäten; C in mathematisch positive Richtung

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (2.2)$$

2.5.5 Residuum an Polstelle m -ter Ordnung berechnen

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) := c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right]$$

c_{-1} ... Koeffizient in der Laurent-Reihenentwicklung

2.5.6 Anwendungen des Residuensatzes

→ Methoden
UE 7.2, 8.1

o Beispielklasse 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad \longrightarrow \quad \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \stackrel{!}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx + \underbrace{\oint_{C_R^+} f(z) dz}_{\text{Hilfsweg}}$$

Vorraussetzungen

- $\operatorname{Grad}(p(x)) + 2 \leq \operatorname{Grad}(q(x)) \Rightarrow$ Hilfsweg "harmlos"
- $q(x)$ hat keine reellen Nullstellen!
- Integration wahlweise über die obere oder untere Halbebene, da die Nullstellen des reellen Polynoms immer komplex konjugiert auftreten.

o Beispielklasse 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{-ix} dx \quad \longrightarrow \quad - \oint_C f(z) dz = -2\pi i \sum_{k=0}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \stackrel{!}{=} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} e^{-ix} dx + \underbrace{\oint_{C_R^+} f(z) dz}_{\text{Hilfsweg}}$$

Vorraussetzungen

- $\operatorname{Grad}(p(x)) + 1 \leq \operatorname{Grad}(q(x)) \Rightarrow$ Hilfsweg "harmlos"
- $q(x)$ hat keine reellen Nullstellen!
- Integration über die obere (**untere**) Halbebene, da nur dort der Hilfsweg harmlos ist. Das Minus (-) vor dem Integral auf der rechten Seite kommt daher, dass nicht in mathematisch positive Richtung (\curvearrowright) integriert wird.

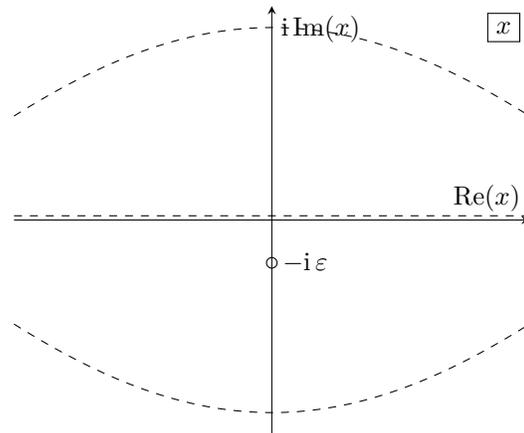
o Beispielklasse 3

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx \quad \longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} z = e^{ix} \\ dz = iz dz \\ \cos z = \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \sin z = \frac{z-z^{-1}}{2i} \end{array} \right| \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{i} \oint_{C_1} \frac{1}{z} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz$$

- Komplexes Integral über den Einheitskreis
- Nur die Residuen innerhalb des Einheitskreises ($|z| < 1$) werden zur Berechnung miteinbezogen
- Es dürfen keine Singularitäten am Rand des Einheitskreises liegen

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x+i\varepsilon} \quad (2.3)$$

⇒ Pol bei $x = -i\varepsilon$



Hilfsweg verschwindet, wenn $e^{-\infty}$ im Zähler steht.

- $k < 0$:
oben schließen
- $k > 0$:
unten schließen

$$\begin{aligned} \int_{x=-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x+i\varepsilon} &= - \oint_C f(z) dz \\ &= -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \\ &= -2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d}{dz} (z - z_0) f(z) \right] \\ &= -2\pi i \cdot (-ik e^{-k\varepsilon}) \\ &= -2\pi k e^{-k\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit $f(z) = \frac{e^{-ikz}}{z+i\varepsilon}$ und $z_0 = -i\varepsilon$

2.6 Räume

2.6.1 Vektorraum

→ Lineare Algebra

eindeutig definiert durch Körper, über dem er definiert ist, und Dimension.

Die Elemente eines Vektorraums (Vektoren) können addiert oder mit Skalaren (Zahlen) multipliziert werden, das Ergebnis ist wieder ein Vektor desselben Vektorraums.

Die Skalare, mit denen man einen Vektor multiplizieren kann, stammen aus einem Körper (z.B.: \mathbb{R} oder \mathbb{C}).

Eine *Basis* eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, die es erlaubt, jeden Vektor durch eindeutige Koordinaten darzustellen. Die Anzahl der Basisvektoren in einer Basis wird *Dimension des Vektorraums* genannt.

2.6.2 Euklidischer Raum

ist der „Raum unserer Anschauung“.

Darauf aufbauend: *Minkowski Raum* mit einer vierten Koordinate, der Zeit.

2.6.3 Banachraum

ist ein vollständiger normierter Vektorraum.

Insbesondere sind viele unendlichdimensionale Funktionenräume Banachräume.

Beispiele

- Euklidischer Raum

2.6.4 Hilbertraum

ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen, versehen mit einem Skalarprodukt, der vollständig ist bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten *Norm*.

Ein Hilbertraum ist ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert ist. Lässt man die Bedingung der Vollständigkeit fallen, spricht man von einem *Prähilbertraum*.

Beispiele:

- Der Koordinatenraum \mathbb{R}^n mit dem reellen Standardskalarprodukt $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.
- Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen L^2 mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int \overline{f(x)} g(x) dx$.

3 Mathematische Methoden der Theoretischen Physik

3.1 Index Notation

→ Methoden Skript S. ???

3.1.1 Vectors

Let us begin this section by taking a look at how objects we already know from linear algebra can be expressed in index notation.

A (column or row) **vector** \mathbf{v} consists of a set of coordinates v^i with respect to a certain basis $\{e_i\}$. Unless stated differently, we will assume that the euclidean basis is being used.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \longrightarrow v^i$$

Covariant vector (basis)

$$v_i$$

$$\boxed{v_i}$$

Contravariant vector (coordinates)

$$v^i$$

$$\boxed{v^i}$$

3.1.2 Matrices

A $m \times n$ - **matrix** A represents a tensor of rank 2 (linear map) also with respect to a certain basis and has $m \cdot n$ elements a_{ij} . The first index (i) is the row index and the second one (j) is the column index.

$$i \downarrow \begin{pmatrix} \xrightarrow{j} \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \longrightarrow a_i^j$$

$$\boxed{a_i^j}$$

Transpose When you transpose the matrix, the order of indices changes. However, the fact that one is a covariant or contravariant indices stays the same!

$$(a^T)^j_i$$

$$\boxed{(a^T)^j_i}$$

Inverse When you invert the matrix, the height of the indices is reversed.

$$(a^{-1})^i_j$$

$$\boxed{(a^{-1})^i_j}$$

3.1.3 Kronecker Delta

(symmetric) Definition:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\boxed{\delta_{ij}}$$

Applying the Kronecker delta to a tensor yields in a change of indices.

$$\delta_{ij}v_j = v_i$$

3.1.4 Levi-Civita Symbol

(totally antisymmetric) Definition:

$$\varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{(ijk) is even permutation of (123)} \\ -1 & \text{(ijk) is odd permutation of (123)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

As soon as two indices are the same, the Levi-Civita symbol is zero.

Rotational shuffling (cyclic permutation) of the indices does not change the sign

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij},$$

while a single exchange of indices equals a multiplication with -1

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}.$$

antisymmetric

Grassmann Identity

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

where the first two indices are in red and the last two indices are in green.

Metric Tensor (symmetric)

Definition: $g_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

The metric tensor has the ability to lower indices. If we apply it to a contravariant vector, we get

$$g_{ij}$$

$$g_{ij} x^j = x_i$$

The metric tensor is symmetric.

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Inverse metric Covariant and contravariant metric tensors are inverse to each other.

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i = \delta_i^k$$

The inverse metric is used to raise indices of other objects (e.g. dual vectors)

$$g^{ij}$$

$$g^{ij}$$

$$g^{ij} v^j = v^i$$

For an orthonormal basis the metric tensor is equal to the Kronecker delta.

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

3.1.5 Einstein Summation Convention

- If an index appears (exactly) twice, then it is summed over and appears only on one side of an equation. The use of summation signs is therefor redundant.
- A single index (called a free index) appears once on each side of the equation.
- Summation indices have to be right next to each other. Otherwise we either have to change the order of elements or use the transpose in the case of matrices.
- One can arbitrarily change the name of indices, as long as the new name does not exist yet in the equation.
- By convention latin indices, i.e. i, j, k, l, \dots , run from $1, 2, 3, \dots, n$, while greek indices like $\mu, \nu, \sigma, \rho, \dots$ run from $0, 1, 2, \dots, n$.

Examples

- matrix multiplication $A \cdot B \longrightarrow \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$
- scalar product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \longrightarrow \sum_{j=1}^n a_i g_i^j b_j$
- vector product $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \longrightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

3.1.6 Operations in Index Notation

Scalar Produkt (symmetric)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \longrightarrow a^i b_i$$

If the basis we are using is not orthogonal and $g_{ij} \neq \delta_{ij}$, we have take the dual space into account using the metric tensor.

$$a^i b_i = a^i b^j g_{ij}$$

Vector Product (antisymmetric)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \longrightarrow \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

A useful fact for proving vector product identities is the following.

$$\text{symmetric tensor} \cdot \text{antisymmetric tensor} = 0$$

Derivative (symmetric)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial^i$$

Konvention: $\partial_i x^j y^k = (\partial_i x^j) y^k = y^k \partial_i x^j$, aber $\partial_i (x^j y^k) = y^k \partial_i x^j + x^j \partial_i y^k$

Trace

$$\text{tr} (T^{ij}) = g_{ij} T^{ij} = T^i_i = T_i^i$$

$$g_{ij} g^{ij} = \delta^i_i = n,$$

where n is the number of dimensions.

Matrices can be T^{ij} , T_{ij} and T^i_j depending on the context, i.e. components of which tensor they are.

3.1.7 Basis Transformation

A vector is linear combination of basis vectors with specific coefficients v^i , called coordinates. No matter what basis we choose, the vector is always the same!

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{e}'_i$$

(1) The **covariant** basis vectors transform given a transformation matrix A .

$$\mathbf{e}'_i = a_i^j \mathbf{e}_j$$

- (2) However, the **contravariant** components of the vector (with respect to a particular basis) transform with the inverse of that transformation matrix A^{-1} .

$$x'^i = (a^{-1})^i_j x^j = \left((a^{-1})^T \right)^i_j x^j$$

The partial derivative $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ can be seen to have a covariant index and transforms like in (1).

For a vector defined over the dual basis, i.e. $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i$, the covariant components x_i transform like in (1), while the contravariant basis vectors \mathbf{e}^i transform like in (2).

Transformation matrix of an infinitesimal path

$$dx^j = a_i^j dx'^i \quad \Leftrightarrow \quad a_i^j = \frac{dx^j}{dx'^i}$$

Obtaining a Dual Basis The scalar product of a normal basis vector and its dual vector is equal to the Kronecker symbol.

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$$

Hence if we write the basis vectors into a matrix A as column vectors, then the dual basis vectors are the row vectors in the inverse A^{-1} of that matrix.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n & & \\ & & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\text{inverse}} \left(\begin{array}{c} -\mathbf{b}_1^* - \\ \vdots \\ -\mathbf{b}_n^* - \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -\mathbf{b}^1 - \\ \vdots \\ -\mathbf{b}^n - \end{array} \right)$$

The dual basis of an orthonormal basis, i.e. the standard (canonical) basis, and the orthonormal basis are identical, since inversion and transposition of orthogonal matrices yields the same result.

$$x^i = x_i$$

The scalar product, and hence also the length of a vector, is independent of the chosen basis.

$$l = \sqrt{x^i x_i} = \sqrt{x'^i x'_i}$$

3.1.8 3 Dimensions

Suppose we are given a scalar field $f(\mathbf{r}) = f(x^j)$ and a vector field $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A^i(x^j)$. In general both depend on the position vector $\mathbf{r} = x^i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

In Euclidean space $v^i = v_i$.

Gradient $\nabla f \quad \longrightarrow \quad \partial_i f(x^j)$

Divergence $\nabla \cdot \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \partial_i A^i(x^j)$

Rotation $\nabla \times \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon^{ij}_k \partial_j A^k$

Laplace Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla \quad \longrightarrow \quad \partial_i \partial^i = \partial^i \partial_i$

Examples Derivative of the euclidean norm

$$\partial_i r = \partial_i \sqrt{x^j x^j} = \frac{1}{2\sqrt{x^j x^j}} \cdot 2x^j \cdot \delta^j_i = \frac{x^i}{r}$$

Zum Vergleich: der Einheitsvektor ist $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x^i}{r} = \frac{x^i}{\sqrt{x^j x^j}}$

Derivative of a component of the position vector

$$\partial_i x^j = \frac{\partial}{\partial x^i} x^j = \delta^j_i$$

Divergence of the position vector

$$\partial_i x^i = \delta^i_i = \text{tr}(\mathbb{1}_n) = n,$$

where n is the dimension.

3.1.9 3+1 Dimensions

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

$$a^\mu \rightarrow a^0 = a_0, a^i = -a_i$$

Vectors with upper or lower indices need to be arranged in such a way, that the EINSTEIN summation convention is correctly translated into matrix multiplication

$$k^\mu k_\mu = k_\mu k^\mu \quad \longrightarrow \quad (k^0 \quad k^1 \quad \dots \quad k^{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} k^0 \\ k^1 \\ \vdots \\ k^{n-1} \end{pmatrix}$$

3.1.10 Symmetry

in einer Matrixdarstellung

$\rightsquigarrow ?$

symmetric matrix

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$$

antisymmetric matrix

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$$

totally antisymmetric tensor (i.e. ε -tensor in n dimensions): sign exchange when exchanging any two indices.

3.2 Arbitrary Dimensions

using the metric

$$g = \left(+1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_N \right)$$

3.2.1 Kronecker Delta

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

3.2.2 Levi-Civita symbol

$$\begin{aligned} \varepsilon^{012\dots N} &= 1 \\ \varepsilon^{012\dots i\dots j\dots N} &= -\varepsilon^{012\dots j\dots i\dots N} \\ g_{i\mu} \varepsilon^{012\dots \mu\dots N} &= -\varepsilon^{012\dots \mu\dots N} \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_{n-p} k_1 \dots k_p} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-p} k_1 \dots k_p} = p! (n-p)! (-1)^N \delta^{i_1 \dots i_{n-p}}_{j_1 \dots j_{n-p}} \quad \rightarrow \text{EDyn 2 UE3} \quad (3.1)$$

3.2.3 Determinant

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_n}^{j_n} = \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} (\det A)$$

or

$$\det A = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1}^0 A_{i_2}^1 \dots A_{i_n}^N \quad (3.2)$$

3.3 Fourier Transformation

Konvention A Die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ lautet

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int d^n x f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Die Rücktransformierte lautet entsprechend

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int d^n k \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Konvention B In der Feldtheorie mit $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \Rightarrow k \cdot x = k^\mu x_\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ Die Fouriertransformierte der Funktion $\varphi(x)$ lautet

$$\tilde{\varphi}(k) = \int d^n x \varphi(x) e^{ik \cdot x}$$

Die Rücktransformierte lautet entsprechend

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \tilde{\varphi}(k) e^{-ik \cdot x}$$

3.3.1 Spezialfall 1D

Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Rücktransformierte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

Die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, sowie die Vorzeichen im Exponenten der Exponentialfunktionen im jeweiligen Integranden sind Konvention. Schlussendlich muss bei einer direkt hintereinander ausgeführten Hin- und Rücktransformation wieder die ursprüngliche Funktion herauskommen.

→ Methoden
S. 145-150

→ Praktische Mathematik
S. 85-95

3.4 Green'sche Funktionen

Anwendbar für lineare Differentialgleichungen der Form

$$\mathcal{L}_x y(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_x = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

Definition **Green'sche Funktion** G ("Inverse" zum Differentialoperator \mathcal{L}_x)

$$\mathcal{L}_x G(x, x') = \delta(x - x')$$

Lösung durch Faltung der Green'schen Funktion G mit der Inhomogenität $f(x)$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') f(x') dx'$$

Bemerkung Diese Methode liefert nur eine Partikulärlösung der obigen Differentialgleichung.

Bemerkung Falls **Translationsinvarianz** ($a_i = \text{const.}$) vorliegt, gelten für die Green'sche Funktion $G(x - x')$ ähnliche Rand- bzw. Anfangswerte. z.B.: $y(x_i) = 0 \Rightarrow G(x_i - x') = 0$

3.4.1 Green'sche Funktion durch Spektralzerlegung

Mit den Eigenfunktionen $\psi_i(x)$ und Eigenwerten λ_i zum Differentialoperator \mathcal{L}_x (mit der Eigenwertgleichung $\mathcal{L}_x \psi_i(x) = \lambda_i \psi_i(x)$) ist die Green'sche Funktion gegeben als

$$G(x - x') = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i(x) \psi_i^*(x')}{\lambda_i} \quad (3.3)$$

3.4.2 Green'sche Funktion durch Fourier Analyse

Annahme Translationsinvariantes System

Die Fouriertransformierte der δ -Funktion ist eine Konstante: $\tilde{\delta}(k) = 1$

$$\delta(x - x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk$$

Fouriertransformierte der Green'schen Funktion

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x') e^{ik(x-x')} dx'$$

Rücktransformierte

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{ikx} dk$$

Einsetzen in $\mathcal{L}_x G(x - x') = \delta(x - x')$ ergibt

$$\mathcal{L}_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk$$

→ Lösen von linearen Differential Gleichungen

→ Methoden S. 185-194

→ Praktische Mathematik S. 56-??

→ Theoretische Physik S. 457-??

Weil die Ableitung auf der linken Seite nur auf die Exponentialfunktion, kann man im Differentialoperator \mathcal{L}_x einfach die Substitution $\frac{d}{dx} \rightarrow ik$ durchführen und erhält ein Polynom $\mathcal{L}(k) \equiv \mathcal{L}_k$. Durch Integrandenvergleich erhält man:

$$\mathcal{L}_k \tilde{G}(k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{\mathcal{L}_k}$$

Schließlich kann man durch Rücktransformation aus $\tilde{G}(k)$ die Greensche Funktion $G(x)$ bekommen

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{ikx} dk$$

3.4.3 Umgehungsvorschriften für Greenfunktionen

Retardierte Greenfunktion (Abstrahlung)

$$\curvearrowright - \curvearrowright$$

Avancierte Greenfunktion (Empfang)

$$\curvearrowleft - \curvearrowleft$$

Kausale Greenfunktion (FEYNMAN, QED)

$$\curvearrowleft - \curvearrowright$$

Bemerkung: Die Kontur ist beliebig rotierbar zB. auf die imaginäre Achse

Antikausale Greenfunktion

$$\curvearrowright - \curvearrowleft$$

3.5 Delta Distributions / Functions

Symmetric

$$\delta(x - y) = \delta(y - x)$$

Given a function $g(x)$ with n solutions $g(x_i) = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x)|_{x=x_i}} \quad (3.4)$$

Special case

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$$

in integrals

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & x_0 \in [x_1, x_2] \\ 0 & x_0 \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

in spherical coordinates

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \delta(r) \delta(\vartheta) \delta(\varphi) \quad (3.5)$$

3.6 Theta function / Heaviside step function

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & x > x_0 \\ \frac{1}{2} & x = x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

4 Klassische Mechanik

Problem: Annahmen, Einschränkungen, Modell

4.1 Kinematik

Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

4.1.1 Orthogonale Gruppe $SO(3)$

Rotationen \rightarrow Orthogonale Matrizen B

$$BB^T = E \quad \text{und} \quad \det(B) = 1$$

Inverse

$$B^{-1} = B^T$$

Abelsche Gruppe = Kommutativ

Kinematik Alle Bezugssysteme sind gleichberechtigt.

Kinetik Inertialsysteme. Wenn wir einen starren Körper in beliebiger Richtung translatorisch in Bewegung setzen und auf ihn dann nicht mehr einwirken (d. h. ihn als kräftefrei voraussetzen), so beschreiben sämtliche Körperpunkte relativ zum Bezugssystem gerade Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit.

4.2 Lagrange-Formalismus

Lagrange Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

Kinetische Energie T

Potential (oder Potentielle Energie) V

$$L = T - V \tag{4.1}$$

Wirkung

$$S[q_i] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \tag{4.2}$$

4.2.1 Euler-Lagrange Gleichungen

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -Q_i} \tag{4.3}$$

mit $i = 1, 2, \dots, n$ und $\frac{d}{dt}$ der totalen Zeitableitung.

\rightarrow totale Ableitung

4.3 Hamilton Formalismus

$$H = T + V \tag{4.4}$$

4.3.1 Hamiltonisches Extremalprinzip

Die Wirkung ist das Integral über die Lagrange-Funktion:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

$$\delta S[q] = 0$$

Legendre Transformation from LAGRANGE formalism

$$H = \sum_i \dot{q}_i p^i - L \quad (4.5)$$

with the conjugate momentum

$$p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

4.3.2 Hamilton Gleichungen

$$p^i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.6)$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.8)$$

4.3.3 Zwangsbedingungen

4.4 Variationsrechnung

diskret

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_i^j$$

$$\partial f(q_k) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_i} \partial q_i$$

kontinuierlich

$$\frac{\delta q(t)}{\delta q(t')} = \delta(t - t')$$

$$\partial f(q(t)) = \int \frac{\delta f(q(t))}{\delta q(t')} \delta q(t') dt' = \frac{\partial f(q(t))}{\partial q(t)} \delta q(t)$$

↔ Elektrodynamik II
Fact sheet

4.4.1 Variation der Wirkung

Variiere die Wirkung und halte dabei die Endpunkte fest, i.e. $\delta t_i = \delta t_f = 0$

$$\delta S [q] = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (4.9)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) dt \quad (4.10)$$

$$\text{(partielle Integration)} \rightarrow = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) dt + \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Big|_{t_i}^{t_f}}_{\text{Randterm}} \quad (4.11)$$

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right)}_{=0} dt \quad (4.12)$$

4.5 Poisson Brackets

$$\{u, v\}_{(q_i, p^i)} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p^i} - \frac{\partial u}{\partial p^i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

The sign convention may vary in the literature!

4.6 Hamilton Jacobi Equation

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

4.7 Noether Theorem

Zu jeder kontinuierlichen (globalen) Symmetrie der Wirkung gibt es eine Erhaltungsgröße.

4.8 Perturbation Theory

4.9 Kanonische Transformation

Eine Transformation von den Variablen q_i, p_i auf *zeitunabhängige* Variable Q_i, P_i , die mit den Anfangswerten $Q_i^0 = q_i(t_0), P_i^0 = p_i(t_0)$ identifiziert werden können.

↪ Pfadintegrale in der QM
→ GOLDSTEIN Buch

4.10 Legendre Transformation

Die *konvexe* Funktion $y(x)$ wird legendre-transformiert bezüglich der Variablen x .

⇒ $\xi = \frac{dy}{dx}$. Die neue (legendre-transformierte) Funktion $y_L(\xi)$ als Funktion der Geschwindigkeit ξ lautet

$$\boxed{y_L(\xi) = y(x) - x \cdot \xi \Big|_{x=x(\xi)}} = y(x) - x \cdot \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x(\xi)}, \quad (4.13)$$

↪ Elektrodynamik II
Fact sheet
↪ Statistische Physik I & II

wobei sich die Beziehung $x = x(\xi)$ durch Auflösen der Gleichung $\xi = \frac{dy}{dx}(x)$ nach x ergibt.

Die Legendretransformierte der Legendretransformierten ist wieder die ursprüngliche Funktion.

Anmerkung: falls y eine Funktion auf einem Vektorraum ist, ist die Legendretransformierte eine Funktion auf dem dualen Vektorraum.

Beispiel Die Legendre Transformierte der Lagrange Funktion $L(q_i, \dot{q}_i)$ bezüglich der Geschwindigkeit \dot{q}_i ist die Hamiltonfunktion $H(q_i, p^i)$ mit dem verallgemeinerten Impuls $p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\boxed{-H(q_i, p^i) = L(q_i, \dot{q}_i) - \dot{q}_i \cdot p^i} \quad (4.14)$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \xrightarrow{\text{Legendre Transformation}} H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (4.15)$$

4.11 Dictionary - Lexicon

conservative system

cyclic system

cyclic variable - not present in the lagrangian / action??

4.12 Hydro/Fluid mechanics

4.12.1 Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.17)$$

Ladung muss kleiner werden, damit ein Strom fließt.

5 Statistical Mechanics

5.1 Ensembles

→ Stat.Phys. I Kap. 3

microcanonical ensemble

abgeschlossenes System von N Teilchen in einem Volumen V
Energie E gegeben durch $E = \mathcal{H}(\{q_i\}, \{p^i\})$

canonical ensemble

betrachte System von N_1 Teilchen in einem Volumen V_1 , das mit einem (wesentlich) größeren System ('**Temperaturbad**'; N_2 Teilchen, Volumen V_2) in Kontakt ist

—
system in a heat bath with temperature T

- *probability*

$$P = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

with $\beta = 1/k_B T$

- *partition function*

$$Z = \sum_{\text{all possible configurations}} e^{-\beta \mathcal{H}} = \text{tr}(e^{-\beta \mathcal{H}}) = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

- *expectation value*

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\text{all possible configurations}} e^{-\beta \mathcal{H}} O = \text{tr}(\rho O) = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | e^{-\beta \mathcal{H}} O | n \rangle$$

- *density operator*

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}} = \frac{1}{Z} \sum_n |n\rangle e^{-\beta E_n} \langle n|$$

→ density operator 7.8

Note the formulae with the basis $|n\rangle$ corresponds to quantum statistical mechanics

grand canonical ensemble

betrachte System von N_1 Teilchen (variabel !) in einem Volumen V_1 , das mit einem (wesentlich) größeren System ('**Temperatur- und Teilchenbad**'; N_2 Teilchen, Volumen V_2) in Kontakt ist

$$Z = \sum_{\text{all possible configurations}} e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)}$$

5.2 Virial Theorem

$\langle A \rangle = \langle A \rangle_t$ represents the average over time t of A .

5.3 Verteilungsfunktionen

Fermi-Dirac

$$f = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (5.1)$$

Bose-Einstein

$$f = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (5.2)$$

Maxwell-Boltzmann

$$f = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (5.3)$$

5.4 Sommerfeld Entwicklung

$$\int_0^{\infty} g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon \approx \int_0^{\mu} g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + O((k_B T)^4) \quad (5.4)$$

→ Statistische Physik I
- Kapitel 6

5.5 Korrelationsfunktion

$$c_{AB}(t, \tau) = \langle A(\tau)B(t + \tau) \rangle$$

↔ Statistische Physik
(5.5) II - Kapitel 3

6 Elektrodynamik

6.1 Elektrostatik

6.1.1 Poisson Gleichung

$$\Delta\phi = ? \quad (6.1)$$

6.1.2 Laplace Gleichung

$$\Delta\phi = ? \quad (6.2)$$

6.1.3 Satz von Gauß

Das GAUSS'sche Gesetz setzt den elektrischen Fluss durch eine geschlossene Oberfläche mit der eingeschlossenen Ladung in Beziehung

$$\Phi_E = \boxed{\int_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_{\text{div} \mathbf{E}} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f}} = 4\pi Q \quad (6.3)$$

∂V ist die Randfläche des Volumens V .

Das Flächenelement $d\mathbf{f}$ ist das Produkt aus dem Betrag des Flächenelements mit seinem Einheitsnormalenvektor, der die Richtung vorgibt, bezüglich der der Fluss betrachtet wird.

In kartesischen Koordinaten in beliebigen Dimensionen und Indexschreibweise

$$\int_V dV \partial_i (\dots) = \int_{\partial V} df_i (\dots) \quad (6.4)$$

6.1.4 Satz von Stokes

$$\boxed{\oint_F \underbrace{\nabla \times \mathbf{X}}_{\text{rot} \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{X}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}} \quad (6.5)$$

∂F ist der Rand der Fläche F .

Bemerkung nur in 3 Dimensionen gültig.

6.2 Maxwell equations

HEAVISIDE units and
 $c = 1$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho && \text{(GAUSS'sches Gesetz)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} && \text{(Induktionsgesetz)} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E} && \text{(AMPÈRE'sches Gesetz)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.3 Eichungen

LORENZ-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = \nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c} \partial_t \phi = 0 \quad (6.7)$$

COULOMB-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.8)$$

Strahlungs-Eichung

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.9)$$

6.4 Spezielle Relativitätstheorie

Einstein's postulates

Relativity principle Physical processes happen under the same circumstances in all reference frames (inertial frames) that are moved at constant relative to each other.

Constant speed of light In all inertial systems the speed of light in a vacuum is the same, independent of the movement of the sources.

6.4.1 Lorentz Transformation

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Lorentz boost - pure velocity transformation (in the same direction)

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v}^T \\ -\gamma \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{v^2} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Usage Transforming a vector from one system S to another (primed) system S' :

- Write down the vector x^μ for the system S
- Transform the vector x^μ using $\Lambda(v)$ to the primed system S' :

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$$

- Substitute t with $t'(t)$; this relation follows from x^0

6.5 Time-like / space-like / light like

line element

$$ds^2 = dt^2 - (d\mathbf{x})^2 < 0$$

6.5.1 Space-like separation

Wenn es ein System gibt, in dem A und B gleichzeitig sind, ist

$$\Delta s^2 = 0 - (\Delta \mathbf{x})^2 < 0$$

6.5.2 Time-like separation

Gibt es umgekehrt ein Inertialsystem, in dem A und B am selben Ort stattfinden, aber $t_B > t_A$ ist, dann sind sich alle Beobachter darüber einig, dass $\Delta s^2 > 0$ ist, und das bedeutet weiter, dass auch für alle anderen Beobachter Ereignis B in der Zukunft von A liegt.

Vergangenheit: $\Delta s^2 > 0$ und $\Delta t < 0$ Zukunft: $\Delta s^2 > 0$ und $\Delta t > 0$

6.5.3 Light-like separation

$\Delta s^2 = 0$ charakterisiert Ereignisse, die mit A durch Austausch von Signalen mit Lichtgeschwindigkeit verbunden werden können, und definiert damit den Lichtkegel über A.

Je nach Vorzeichen von Δt liegt B auf dem Vorwärts- oder Rückwärtslichtkegel.

6.6 Feldtheorie

trace of $A^{\mu\nu}$

$$\text{tr}(A) = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\mu, \quad (6.12)$$

where $g_{\mu\nu}$ is the metric.

6.6.1 Lagrange Formalismus

↔ EDyn 2 fact sheet

Electrodynamics:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \propto \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right) \quad (6.13)$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} = 0 \quad (6.14)$$

Electrodynamics: $\Phi = A^\mu$

6.6.2 Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (6.15)$$

6.6.3 Spontane Symmetriebrechung

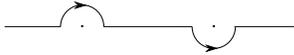
6.7 Pole prescriptions

→ EDyn 2 Notizen
→ AKT 2 Notizen
→ QFT 1-4 notes

Pole prescriptions

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 - m^2 \pm i\epsilon} \quad (6.16)$$

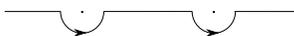
Causal Green function



Causal Retarded Green function



Causal Advanced Green function



Feynman Green function



7 Quantenmechanik

7.1 Axiome der Quantenmechanik

↔ Quantentheorie II
S.64-65

1. Der Zustand des quantenmechanischen Systems wird durch einen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ im Hilbertraum \mathcal{H} vollständig charakterisiert (=“reiner Zustand”). Im Falle eines statistischen Gemisches (gemischter Zustand) wird das System durch den statistischen Operator (=Dichteoperator) ρ beschrieben.
2. Der physikalischen Observablen A entspricht ein hermitescher Operator $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. (Der Observablen $f(A)$ entspricht die Operatorfunktion $f(\hat{A})$.)
3. Der Mittelwert der Observablen A im Zustand $|\psi\rangle$ ist durch $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ gegeben. Im Falle eines statistischen Gemisches erhält man ihn aus der Beziehung $\text{tr}(\rho \cdot \hat{A})$.
4. Unabhängig vom Zustand $|\psi\rangle$ sind die einzig möglichen Ergebnisse einer Messung der Observable A die Eigenwerte a_n des Operators A

$$\hat{A}|\Phi_n\rangle = a_n|\Phi_n\rangle,$$

wobei $|\Phi_n\rangle$ der Eigenvektor zum Eigenwert a_n ist;

Nach einer Messung, die den nicht entarteten Eigenwert a_n ergeben hat, befindet sich das System im Zustand $|\Phi_n\rangle$ (“Kollaps” der Wellenfunktion). Der normierte Zustand ist dann:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{\langle\Phi_n|\psi\rangle}{\sqrt{|\langle\Phi_n|\psi\rangle|^2}} |\Phi_n\rangle$$

5. Für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von A den Meßwert a_n zu erhalten, gegeben durch

$$p_n = |\langle\Phi_n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\hat{p}_n|\psi\rangle,$$

wobei p_n der Projektionsoperator auf den Eigenvektor $|\Phi_n\rangle$ ist;

Die Messung mit dem Wert a_n führt zum “Kollaps” der Wellenfunktion auf $|\Phi_n\rangle$.

6. Die Entwicklung des Systems wird durch die Schrödinger Gleichung bestimmt

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

7. Operatoren, die ein klassisches Analogon besitzen, insbesondere der Hamilton-Operator H , werden durch kanonische Quantisierung bestimmt, d.h. die kanonischen Koordinaten r_i , p_j werden durch nicht vertauschbare Operatoren ersetzt, die der Vertauschungsrelation

$$[r_i, p_i] = i\hbar \delta_{ij}$$

genügen. Operatoren, deren klassisches Analogon Funktionen von r_i und p_i sind, werden in der Reihenfolge der nichtvertauschbaren Operatoren symmetrisiert, zum Beispiel:

$$f(x, p_x) \rightarrow F = x p_x = \frac{1}{2} (x p_x + p_x x)$$

Diese 7 Punkte stellen keine logisch geschlossenen Axiome dar, sie sind nur “Kochrezepte”, die bisher in keinem Widerspruch zu allen durchgeführten Experimenten stehen. Alle bislang bekannten quantenmechanischen Probleme sind damit (im Prinzip) lösbar.

7.2 Schrödinger Gleichung

Die Energie eines Zustandes ψ bekommt man, indem man seine Wellenfunktion in die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung einsetzt

$$H\psi = E\psi.$$

7.3 Dirac Schreibweise

Zustandsvektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (Hilbertraum) mit

7.3.1 Vollständige Eins

Diskrete Basis

$$\mathbb{1} = \sum_n |a_n\rangle\langle a_n|$$

Kontinuierliche Basis

$$\mathbb{1} = \int dx |x\rangle\langle x|$$

7.3.2 Scalar product, Projektion (Braket)

$$\langle\psi|\phi\rangle \longleftrightarrow \langle\text{Endzustand}|\widehat{|\text{Anfangszustand}}\rangle \quad (7.1)$$

Man sagt $|\phi\rangle$ wird projiziert auf $|\psi\rangle$ (bzw. umgekehrt \rightarrow Skalarprodukt ist symmetrisch).

7.3.3 Komplex Konjugiert

Komplex konjugieren des “Brakets” \equiv vertauschen

$$\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$$

7.3.4 Hermitesch Konjugiert

$$|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi| \quad \Leftrightarrow \quad \langle\psi|^\dagger = |\psi\rangle$$

Hermitesch konjugieren des äußeres Produkts \equiv vertauschen

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = \langle\phi|^\dagger|\psi\rangle^\dagger = |\phi\rangle\langle\psi|$$

7.3.5 Erwartungswert

einer Observablen \hat{A} für einen Zustand $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \quad (7.2)$$

7.3.6 Matrixelement

$$A_{ij} := \langle\psi_i|\hat{A}|\psi_j\rangle \quad (7.3)$$

hermitesch adjungiert

$$\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_j\rangle^\dagger = \langle\psi_j|\hat{A}^\dagger|\psi_i\rangle$$

analog zu $a_{ij}^\dagger = a_{ji}^*$

7.3.7 Transformationen

Sei $\psi' = R\psi$

$$|R\psi\rangle = R|\psi\rangle$$

$$\langle R\psi| = \langle\psi|R^\dagger$$

Invarianz des Brakets unter unitären Transformationen

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle R\psi|R\psi\rangle = \langle\psi|\underbrace{R^\dagger R}_{=\mathbb{1}}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

7.3.8 Mehrere Komponenten

$$|l, m\rangle \equiv |lm\rangle$$

7.4 Operatoren der Quantenmechanik

Operator	A	Parität	Eigenschaften
Hamiltonoperator	H	gerade	hermitesch
Orts-/Positionsoperator	x	ungerade	
Impulsoperator	p	ungerade	
Potentialoperator	$V(x)$	n.a.	
Paritätsoperator	P oder Π	gerade	
Einheitsoperator	1	gerade	
Null?operator	0	?	
Projektionsoperator	P_i	gerade	hermitesch, idempotent
Evolutionsoperator	$U(t)$		unitär
Drehimpulsoperator	L	gerade?	hermitesch
Spinoperator	S	gerade?	hermitesch
Aufsteigeroperator	a^\dagger, L_+	?	-
Absteigeroperator	a, L_-	?	-
Dichteoperator	ρ	?	hermitesch, normiert, positiv semidefinit
Erzeugungsoperator			
Vernichtungsoperator			

7.5 Symmetrien in der Quantenmechanik

$$\mathcal{R}\psi = \psi(R^{-1}r_i), \quad (7.4)$$

wobei $\mathcal{R} \in \mathcal{H}$ und $R \in \mathbb{R}^3$.

Infinitesimale Drehung

$$\mathcal{R}_U(\eta) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\eta(\hat{U} \cdot \mathbf{L}) \quad (7.5)$$

Hier ist der Drehimpuls \mathbf{L} der Generator (erzeugende Funktion) der Drehung (Transformation).

Allgemeiner Operator

$$\mathcal{O} = e^{-i\alpha \cdot A} \quad (7.6)$$

wobei \mathcal{O} folgende (jeweils die andere implizierende) Eigenschaften hat

- $\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} = \mathbb{1}$ unitär (Erhaltung der Norm unter Drehungen, oder Transformationen im Allgemeinen)
- $A^\dagger = A$ hermitesch

7.5.1 Parität

Gerade Parität

$$V(x) = V(-x)$$

Ungerade Parität

$$V(x) = -V(-x)$$

Paritätsoperator

$$\Pi^\dagger \Pi = \Pi \Pi^\dagger = \mathbb{1} \quad (7.7)$$

$$\Pi \psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) \quad (7.8)$$

$$\Pi Y_l^m = (-1)^l Y_l^m \quad (7.9)$$

insbesondere in Kugelkoordinaten wirkt der Paritätsoperator wie folgt

$$\Pi \psi(r, \vartheta, \varphi) = \psi(r, \pi - \vartheta, \varphi + \pi) \quad (7.10)$$

7.5.2 Erhaltungsgröße

$$\text{Erhaltungsgröße} \Leftrightarrow [e^{i\alpha A}, H] = 0 \Leftrightarrow [A, H] = 0 \quad (7.11) \quad \rightarrow \text{NOETHER Theorem}$$

7.6 Streuprobleme

7.7 Messungen

Bei einer Messung werden nur Eigenzustände eines Operators A gemessen!

7.7.1 Wahrscheinlichkeitsmessung

Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Messwert eines hermiteschen Operators zu messen ist gleich dem Absolutquadrat der Projektion des Zustandes des Teilchens auf den Eigenzustand des Operators zu diesem Messwert (Eigenwert).

$$W(\text{Messwert}) = |\langle \text{Eigenfunktion zu diesem Messwert} | \text{Zustand des Teilchens} \rangle|^2$$

7.7.2 Erwartungswerte quantenmechanischer Observablen

$$\langle \dots \rangle = \langle \text{Zustand } \psi | \dots | \text{Zustand } \psi \rangle$$

Energieerwartungswert

$$E = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (7.12)$$

7.7.3 Ehrenfest Theorem

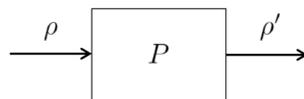
Für Potentiale mit einem Polynomgrad ≤ 2 stimmen die klassische und quantenmechanische Bewegungsgleichung für Erwartungswerte überein.

7.7.4 Projektionsoperator

$$P = P^\dagger \quad (7.13) \quad \rightsquigarrow \text{QM II Plenum 28.10.'16}$$

$$P^2 = P \quad (7.14)$$

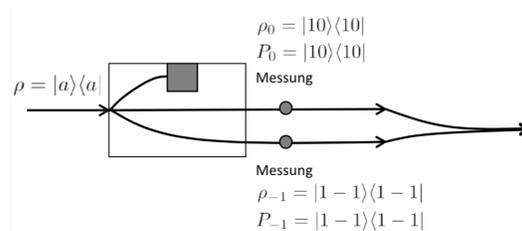
Beliebiger Messprozess mit allgemeinem Projektor P



$$\text{Wahrscheinlichkeit } W = \text{tr}(\rho \cdot P)$$

$$\text{(Normierter) Zustand } \rho' = \frac{P\rho P}{\text{tr}(\rho P)}$$

Inkohärente Überlagerung der Zustände beim STERN-GERLACH-Apparat (zwei separate Projektionen und anschließend Gewichtung)

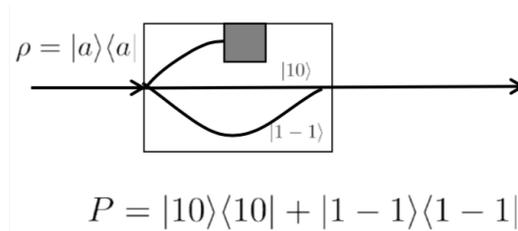


$$\begin{aligned}
W &= W_0 + W_{-1} \\
&= \text{tr}(|a\rangle\langle a|P_0) + \text{tr}(|a\rangle\langle a|P_{-1}) \\
&= |\langle a|10\rangle|^2 + |\langle a|1-1\rangle|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{1}{W} (W_0\rho_0 + W_{-1}\rho_{-1}) \\
&= \frac{1}{W} (W_0|10\rangle\langle 10| + W_{-1}|1-1\rangle\langle 1-1|)
\end{aligned}$$

⇒ Gemisch.

Kohärente Überlagerung der Zustände beim STERN-GERLACH-Apparat (eine Projektion)



$$\begin{aligned}
W &= \text{tr}(|a\rangle\langle a|P) \\
&= |\langle a|10\rangle|^2 + |\langle a|1-1\rangle|^2
\end{aligned}$$

$$\rho' = \frac{P|a\rangle\langle a|P}{\text{tr}(P|a\rangle\langle a|P)}$$

Anmerkung Ein reiner Zustand bleibt nach Projektion ein reiner Zustand.

$$\begin{aligned}
|\psi'\rangle &= \frac{P|a\rangle}{\sqrt{\langle a|P|a\rangle}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{W}} (|10\rangle\langle 10|a\rangle + |1-1\rangle\langle 1-1|a\rangle)
\end{aligned}$$

⇒ Kohärente Superposition.

7.8 Dichteoperator

↔ QM II
S. 55ff 1,2,3,4,5
↔ Stat.Phys. I
Kap. 4

Eigenschaften

- positiv semidefinit
- $\text{tr}(\rho) = 1$ normiert
- $\text{tr}(\rho^2) \leq 1$

gemischter Zustand: ρ muss nicht diagonal sein in H , A -Basis

reiner Zustand: muss kein Eigenzustand von H sein → kohärente Superposition.

Erwartungswert $\langle A \rangle = \text{tr}(\rho \cdot A)$

	reiner Zustand	gemischter Zustand
Beschreibung	$ \psi\rangle = \sum_n \alpha_n \Phi_n\rangle$	$\rho = \sum_n \psi_n\rangle p_n \langle\psi_n $ mit $ \psi_n\rangle = \sum_i \alpha_i \Phi_i\rangle$ $0 \leq p_n \leq 1$ mit $\sum_n p_n = 1$
Erwartungswert ¹	$\langle A \rangle = \langle \psi A \psi \rangle = \sum_n a_n \underbrace{ \langle \phi_n A \rangle ^2}_{= \alpha_n ^2}$	$\langle \bar{A} \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n A \psi_n \rangle$
	$\rho^2 = \rho$ $\text{tr}(\rho^2) = 1$	$\rho^2 \neq \rho$ $\text{tr}(\rho^2) < 1$

Die Dichtematrix eines reinen Zustandes hat in der Eigenbasis nur einen Eintrag in der Diagonale.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

(Gemischter Zustand?) Ist ρ in einer Basis diagonal, so ist dies im Allgemeinen nicht dieselbe Basis wie jene von H oder jene von A (Observable).

“Kollaps” des Dichteoperators

7.8.1 Basiswechsel zwischen Koordinatensystemen

Sei A die Eigenbasis von H und B eine beliebige andere Basis

$$H^{\{B\}} \rightarrow \text{Eigenwerte } E_i \text{ und Eigenvektoren } v_i$$

Sei

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$H^{\{A\}} = T A T^T \text{ oder } T^T A T = \text{diag}(E_i)$$

STERN-GERLACH-Apparate

$$\rho^{\{z\}} = T(s_x^{\{z\}}) \rho^{\{x\}} T(s_x^{\{z\}})^T$$

¹Die Spur ist *basisinvariant* ⇒ Erwartungswert hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

→ Lineare Algebra:
Ähnlichkeitstransformation

7.9 Harmonischer Oszillator

\hat{O}_p^\dagger creates a state from the vacuum.

\hat{O}_p annihilates that state.

→ Field theory

7.9.1 Kommutator Algebra

→ LIE-Algebra

Eigenschaften:

- JACOBI Identität

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

- Antisymmetrie

$$[A, B] = AB - BA$$

$$[B, A] = -[A, B]$$

$$[A, BC] = [A, B]C - B[A, C]$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

Das Evaluieren des Kommutators hat Ähnlichkeiten mit dem Ableiten:

→ Derivationen

$$[a, b^2] = 2 \cdot b [a, b] \quad \checkmark \text{ check this formula!}$$

7.9.2 Drehimpuls

7.10 Spin

→ PAULI-Matrizen
12.8.4

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$$

7.10.1 Kopplung von Drehimpulsen

$$|T^{(1)}, T_z^{(1)}, T^{(2)}, T_z^{(2)}\rangle \longrightarrow |T^{(1)}, T^{(2)}, T, T_z\rangle, \quad (7.16)$$

↔ QM 1, Kapitel 5.6
→ Tensorprodukt (von
HILBERT-Räumen)

wobei $T^{(1)} = L$ und $T^{(2)} = S$.

→ **Clebsch-Gordan Koeffizienten** hier Bild zur Beschreibung des Ablesens aus der Tabelle einfügen ... ↔ Quanten2 UE #? 12.5.4

7.11 Darstellungstheorie

Schrödinger-Gleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle} \quad (7.17)$$

	Ortsbasis	Impulsbasis
Eigenwertgleichung	$\hat{\mathbf{r}} \mathbf{r}\rangle = \mathbf{r} \mathbf{r}\rangle$ ¹	$\hat{\mathbf{p}} \mathbf{k}\rangle = \hbar\mathbf{k} \mathbf{k}\rangle$ $\hat{\mathbf{p}} \mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} \mathbf{p}\rangle$ ²
	$\mathbb{1} = \int d^3x \mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x} $	$\mathbb{1} = \int d^3p \mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p} $
(⁵)	$\langle\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} \mathbf{r}'\rangle = \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ³	$\langle\mathbf{k} \hat{\mathbf{p}} \mathbf{k}'\rangle = \hbar\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$
Potential ⁴	$V(\mathbf{r})$	$\tilde{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}' - \mathbf{k})} V(\mathbf{r})$
Wellenfunktion	$\langle\mathbf{r} \mathbf{k}\rangle = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ $\langle\mathbf{r} \mathbf{k}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ $\langle\mathbf{r} \mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}$	$\langle\mathbf{k} \mathbf{r}\rangle = \psi_{\mathbf{r}}(\mathbf{k})$ $\langle\mathbf{k} \mathbf{r}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ $\langle\mathbf{p} \mathbf{r}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}$
Analogon	$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$	$\mathbf{x} \rightarrow i\hbar \frac{d}{dp}$
Projektion (⁶)	$\langle\mathbf{r} \hat{\mathbf{p}} \mathbf{r}'\rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	$\langle\mathbf{p} \hat{\mathbf{r}} \mathbf{p}'\rangle = i\hbar \nabla_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$
δ -Distribution	$\langle\mathbf{r} \mathbf{r}'\rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\hbar)$	$\langle\mathbf{k} \mathbf{k}'\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r \exp(i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}'))$ $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \exp(i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')/\hbar)$

7.11.1 Darstellungswechsel

Ähnlichkeitstrafo?

¹ $\hat{\mathbf{r}}$... Ortsoperator, \mathbf{r} ... Ortseigenwert

² \mathbf{r} in $|\mathbf{k}\rangle$ ist Index, \mathbf{k} in $\hbar\mathbf{k}$ ist Wellenzahl \propto Impulseigenwert

³es gilt auch $\langle\mathbf{r}|V(\hat{\mathbf{r}})|\mathbf{r}'\rangle = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

⁴Fouriertransformierte muss existieren

⁵lokaler Operator

⁶nicht-lokaler Operator

7.12 Transformationsmatrix U zwischen Darstellungen

Eigenschaften von U

unitär	$U^\dagger U = \mathbb{1} \Leftrightarrow U^\dagger = U^{-1}$	weil H hermitesch ist
	$\tilde{H} = U H U^\dagger$	Wenn H zeitunabhängig, ist auch U zeitunabhängig (konservative Systeme)
	$[H, U] = 0$	

7.12.1 Evolutionsoperator

oder auch Zeitentwicklungsoperator

Eigenschaften von $U(t, t_0)$

$$U(t) := U(t, t_0 = 0)$$

$$U(0) := \mathbb{1}$$

$$U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) = \mathbb{1} \quad \text{unitär}$$

$$U^\dagger(t) = U(-t) \quad \text{for } t_0 = 0$$

$$[H, U(t, t_0)] = 0$$

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} \quad \text{wobei } H \text{ zeitunabhängig sein muss}$$

7.13 Bilder der Quantenmechanik

$$U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad (7.18)$$

$$U_0(t) = e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_H(t) = U^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U(t) \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_I(t) = U_0^\dagger(t) \frac{\partial}{\partial t} A_S(t) U_0(t) \quad (7.21)$$

Schrödingerbild	Heisenbergbild	Wechselwirkungsbild
$ \psi(t)\rangle_S = U(t) \psi(0)\rangle_S$	$ \psi\rangle_H = U^\dagger(t) \psi(t)\rangle_S = \psi(0)\rangle_S$	$ \psi(t)\rangle_I = U_0^\dagger(t) \psi(t)\rangle_S$
$A_S \equiv A$	$A_H(t) = U^\dagger(t) A U(t)$	$A_I(t) = U_0^\dagger(t) A U_0(t)$ ¹
$H_S = H$	$H_H(t) \equiv H$, falls H nicht t -abhängig	$H = H_0 + V(t)$
$i\hbar A = 0$	$i\hbar A_H(t) = [A_H(t), H] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_H(t)$	$i\hbar A_I(t) = [A_H(t), H_0] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_I(t)$ ²
$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t)\rangle_S = H \psi(t)\rangle_S$	$i\hbar \psi\rangle_H = 0$	$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t)\rangle_I = V_I(t) \psi(t)\rangle_I$
$\rho_S(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t)$	$\rho_H(t) = \rho(0)$	$\rho_S(t) = U_0(t) \rho(0) U_0^\dagger(t)$
$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_S(t) = [H, \rho_S(t)]$	$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_H(t) = 0$	$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_I(t) = [V_I(t), \rho_I(t)]$

Bemerkung Der Erwartungswert eines Operators A ist in allen drei Bildern gleich!

7.14 Entanglement

7.14.1 Kriterium für Verschränktheit

entanglement

- *Verschränkt*, wenn nicht separabel / faktorisiert.
- *Nicht verschränkt*, wenn als Produkt $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ darstellbar.

Ein Zustand

$$|\psi\rangle_V = \sum_{i,j} c_{i,j} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 \quad (7.22)$$

heißt *separierbar*, wenn $c_{i,j} = c_i^A \cdot c_j^B \quad \forall i, j \Rightarrow (c_1^A, c_2^A, \dots)$ und (c_1^B, c_2^B, \dots) .

Verschränktheit Durch Messung des Spins von Teilchen 1 wird der Spin von Teilchen 2 festgelegt.

“*BELL states*” sind maximal verschränkt

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}\rangle \otimes |-\frac{1}{2}\rangle \pm |-\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}\rangle) \quad (7.23)$$

Was ist System 2? →
Beispiel?

$$\rho_{ein} = \text{tr}_2(\rho) \quad (7.24)$$

Was ist N ? Die Dimension?

$$\frac{1}{N} \leq \text{tr}(\rho_{ein}^2) \leq 1 \quad (7.25)$$

Dekohärenz reduziert Superposition zu klassischem Zustand.

untere Schranke: maximale Dekohärenz für maximal verschränkte Zustände (→ BELL states)

Bei der Kopplung mit der Umgebung kann ein System seine Interferenzeigenschaften verlieren.

7.14.2 Reduzierte Dichtematrix

$$\rho_1 = \text{tr}_2(\rho) \quad (7.26)$$

Es gilt

$$\text{tr}_1(\rho_1) = \begin{cases} 1 & \text{nicht verschränkt} \\ \frac{1}{N} & \text{verschränkt} \end{cases} \quad (7.27)$$

Anmerkung Verschränkter und nicht verschränkter Zustand sind beides *reine Zustände*.

7.15 Störungstheorie

nach RAYLEIGH-SCHRÖDINGER

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{ungestörter HAMILTON-Operator}} + \underbrace{V}_{\text{Störung}} \quad (7.28)$$

7.15.1 zeitunabhängige (nicht entartete) Störungstheorie

↔ Quantentheorie 2
Kapitel 9

$$\psi^{(0)} = \Phi_m$$

$$\Delta E_m^{(1)} = \langle \psi^{(0)} | V | \psi^{(0)} \rangle \quad (7.29)$$

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{n \neq m} \frac{\langle \Phi_n | V | \Phi_m \rangle}{E_m - E_n} |\Phi_n\rangle \quad (7.30)$$

$$\Delta E_m^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{|\langle \Phi_n | V | \Phi_m \rangle|^2}{E_m - E_n} \quad (7.31)$$

wobei die Φ_n mit $n = 0, 1, 2, \dots$ die Eigenzustände des HAMILTON Operators sind.

Die (korrigierte) Gesamtenergie ergibt sich also zu

$$E = E_0 + \Delta E^{(1)} + \Delta E^{(2)}. \quad (7.32)$$

7.15.2 zeitunabhängige (entartete) Störungstheorie

N -fache Entartung des Energieeigenwertes E_m (oder sehr dicht beisammen liegende Eigenwerte). \Rightarrow Betrachte N -dimensionalen Unterraum U des Hilbertraums.

$$E_m \approx E_{n'} \quad \text{wobei} \quad H_0 |\Phi_{n'}\rangle = E_{n'} |\Phi_{n'}\rangle \\ |\Phi_m\rangle, |\Phi_{n'}\rangle \in U$$

mit $n' = 1, \dots, N$.

In nullter Ordnung

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N a_i |\Phi_n\rangle \quad (7.33)$$

Korrekturterme zur Energie E folgen aus

$$\det \left(\underbrace{E_m \mathbb{1}}_{H_0} + V - E \mathbb{1} \right) = 0 \quad (7.34)$$

$$\text{mit} \quad H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_N \end{pmatrix}$$

7.15.3 time-dependent perturbation theory

Transition amplitude with $H_I(t) = U_0^\dagger H_1 U_0$

$$\mathcal{T}_{f \leftarrow i} = \langle f | \mathbb{T} e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t)} | i \rangle, \quad (7.35)$$

where \mathbb{T} denotes time ordering, i.e.

(operator at later times) $\times \dots \times$ (operator at earlier times)

7.16 Matrizen

→ zu Lineare Algebra hinzufügen!

hermitesche Konjugation

$$A^\dagger = (A^T)^*$$

7.16.1 Eigenschaften von Operatoren / Matrizen

Unitär

$$A^\dagger A = 1 \Leftrightarrow A^{-1} = A^\dagger$$

Hermitesch (selbstadjungiert)

$$A^\dagger = A \text{ und in Komponentenschreibweise: } a_{ji}^* = a_{ij}$$

Antihermitesch

$$A^\dagger = -A \text{ und in Komponentenschreibweise: } a_{ji}^* = -a_{ij}$$

7.16.2 Matrizenrechenregeln

Transposition (Bildung der Adjungierten)

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Allgemein für hermitesche Konjugation (Selbsadjungierte):

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Wenn die Matrizen A , B und auch $AB = (AB)^\dagger$ hermitesch sind, dann folgt $[A, B] = AB - BA = AB - (AB)^\dagger = 0$.

- wenn $A^2 = 1 \Rightarrow$ eigenvalues = ± 1
- wenn $B^2 = -1 \Rightarrow$ eigenvalues = $\pm i$

-

- Matrices A and B with eigenvalues $EV(A) = a_i$ and $EV(B) = b_i$, then

$$EV(A \cdot B) = a_i \cdot b_i$$

-

A unitary transformation (looks like $A \rightarrow UAU^\dagger$??) preserves hermiticity!

When applying a **unitary transformation** to a matrix, the following properties do not change:

- determinant: $\det(A) = \det(UAU^\dagger)$
- eigenvalues: $EV(A) = EV(UAU^\dagger)$
- trace: $\text{tr}(A) = \text{tr}(UAU^\dagger)$

When applied to a vector, its norm stays the same

7.16.3 Matrixexponential eines Operators

$$e^{c \cdot A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{A^k} \quad (7.36)$$

Achtung: Wenn $[A, B] \neq 0$, dann ist

$$e^A e^B \neq e^{A+B}$$

Spezialfall Hamiltonoperator: Exponentialfunktion wohldefiniert nur für zeitunabhängige H , sonst Verallgemeinerung zu "zeitgeordneter" Exponentialfunktion.

Das Exponential eines Operators folgender Form ist ($\sigma_i \dots i$ -te Pauli-Matrix, $\hat{n} \dots$ Einheitsvektor in beliebige Richtung)

$$e^{i\alpha \hat{n} \cdot \sigma} = \cos \alpha \cdot \mathbb{1} + i \sin \alpha \cdot (\hat{n} \cdot \sigma) \quad (7.37)$$

Note: $(\hat{n} \cdot \sigma)^{2n} = \mathbb{1}$

Nur Operatoren, die als diagonale Matrizen dargestellt werden können, können exponenziert werden. Die Exponentiation eines diagonalen Operators Λ mit den Eigenwerten λ_i ist dann

$$e^\Lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

7.16.4 Spektralsatz

↔ Methoden Kapitel

A ist eine (orthogonale, orthonormale, symmetrische, ...??) Matrix mit den Eigenwerten λ_i und den Eigenvektoren $|\phi_i\rangle$, dann gilt.

$$A = \sum_i |\phi_i\rangle \lambda_i \langle \phi_i|$$

Satz Eine Matrix ist in der Darstellung ihrer Eigenbasis diagonal.

Spektraldarstellung symmetrisch vs. hermitesch
orthogonal vs. unitär

Eine reelle Matrix heißt (reell) **diagonalisierbar**, wenn
i) das charakteristische Polynom nur reelle Nullstellen hat
ii) für jede Nullstelle algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

↔ Lineare Algebra

Symmetrische und hermitesche Matrizen haben stets nur reelle Eigenwerte.

Verschiebungssatz

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

7.16.5 Pauli Matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenschaften der PAULI-Matrizen siehe Gruppentheorie 12.8.4

7.16.6 Parity transformations

A scalar that picks up an extra minus sign in a parity transformation is called a *pseudo-scalar*

$$PX = -X \quad \text{with } P \dots \text{ parity transformation}$$

A vector is called *pseudo vector* (or *axial vector*), if

$$PLP = \mathbf{L}$$

$$P\mathbf{r}P = -\mathbf{r}$$

pseudo tensor

Teil II

Standard Model of Particle Physics

Teilchenzoo

- Hadron
- Baryon
 - Quark (Farbladung, ...): up, down, strange, charm, top, bottom
- Meson
 - Pion
 - Lambda-Teilchen
- Gluon (spin-1, massless)
- Photon (spin-1, massless, polarization)

Eigenschaften von Hadronen

- Masse
- Ladung
- Spin I
- Isospin T
- Parität Π

Übersicht

- Feldtheorie
- Quantenfeldtheorie
- Eich(feld)theorie
- YANG-MILLS-Theorie

QED (quantisierte Eichfeldtheorie mit lokaler $U(1)$ -Symmetrie)

Materie \leftrightarrow Elektromagnetische Felder

QCD

Hadronen \leftrightarrow starke WW

Auch die **Gravitation**, wie sie durch EINSTEINS allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird, kann in einem gewissen Sinn als eine Eichtheorie verstanden werden, nämlich als eine Theorie mit lokaler Invarianz unter Koordinatentransformationen (Diffeomorphismen).

Das Eichfeld ist hier durch die Metrik des gekrümmten Raumes bzw. durch die zugehörigen Christoffel-Symbole gegeben; der zugehörige Feldstärketensor ist ebenfalls darstellbar über den Kommutator von kovarianten Ableitungen, was auf den Riemann'sche Krümmungstensor führt.

Symmetries

- parity P
- charge conjugation symmetry C
- CP

8 Quantenfeldtheorie

\mathcal{L} and \mathcal{H} are Lorentz scalars!

SCHRÖDINGER picture: operators at a fixed time t_0

HEISENBERG picture: operators evolve with time t In QFT the *Heisenberg picture* is used.

→ Classical Mechanics:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$$

→ pictures of QM 7.13

8.1 Second quantization

(canonical quantization)

wave functions as fields \mapsto operator valued fields

wave functions \mapsto operators

↔ QED Skript 5.1

(equal-time) commutation relation

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})]_t = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (8.1)$$

equal time commutation relation:

$$[q^i(t), p_j(t)] = i\hbar \delta^i_j$$

8.1.1 momentum space

commutation relations

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (8.2)$$

LORENTZ-invariant integration measure

$$\int d\tilde{k} := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \quad \text{with} \quad \omega_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \quad (8.3)$$

ground state (vacuum state) $|0\rangle$

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k} \quad \text{and} \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (8.4)$$

The vacuum state is defined to have zero energy.

Normal ordering : H :

Places all annihilation operators a to the right of all creation operators a^\dagger .

creating a particle Acting with the creation operator $a^\dagger(\mathbf{k})$ on the vacuum

$$|\mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$$

produces a state which carries energy ω_k and momentum \mathbf{k} .

many-particle states repeated action of creation operators on the vacuum.

○ obey BOSE statistics, since $[a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$

○ live in FOCK space (the name of the resulting many-particle HILBERT space)

time-ordered product T

$$T\varphi(x')\varphi^\dagger(x) := \theta(t' - t)\varphi(x')\varphi^\dagger(x) + \theta(t - t')\varphi^\dagger(x)\varphi(x') \quad (8.5)$$

Feynman or causal propagator

$$G_{\text{FEYNMAN}}(x' - x) = i\langle 0|T\varphi(x')\varphi^\dagger(x)|0\rangle \quad (8.6)$$

$$= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot(x'-x)} \quad (8.7)$$

8.1.2 LSZ formula

for neutral scalar fields

$$\begin{aligned} \langle q_1 \dots q_m | S | p_1 \dots p_n \rangle &= i^{m+n} \int d^4y_1 \dots d^4x_n \quad e^{iq_1 \cdot y_1} \dots e^{-ip_n \cdot x_n} \\ &\quad \times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{x_n} + m^2) \\ &\quad \times \langle 0 | T \varphi_I(y_1) \dots \varphi_I(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.8)$$

Wick's theorem WICK's theorem expresses a time-ordered product as the sum of all possible normal products where pairs of field operators have been omitted and replaced by FEYNMAN GREEN's functions. This substitution is often called "contraction".

$$T\varphi_1 \dots \varphi_n = \sum : \varphi' s : \quad (8.9)$$

8.2 Feynman Diagrams

8.2.1 Feynman rules in momentum space

↔ Feynman diagrams
file

- vertex
- photon line
- fermion line
- loop
- fermion loop
- external lines
- —————
- vacuum diagram
- self energy diagram

self energy

vacuum polarization diagram (photon self-energy) a closed fermion loop

mass shell $p^2 = m^2$
for photons: $q^2 = 0$ (\equiv light-cone)

Feynman parametrization

Renormalization of the mass parameter of the electron and of wave functions (on the mass-shell)

8.2.2 Regularization

dimensional regularization alter the number of space-time dimensions to $n < 4$

$$n = d - \epsilon \quad (8.10)$$

coupling constant e obtains mass dimension $\text{mass}^{(4-n)/2}$
keep fine-structure constant $\frac{e^2}{4\pi}$ free of mass dimension \Rightarrow referential mass scale μ , $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-n}$

Ward identities gauge invariance implies certain identities among FEYNMAN diagrams, e.g. $\Pi_{\mu\nu}(q)q^\mu \equiv 0$

8.2.3 Renormalization schemes

Renormalization group

counter term to $\Pi_{\mu\nu}$ has precisely the tensor structure to subtract out the infinities in $\Pi_{\mu\nu}$.

- Minimal subtraction MS
- Modified minimal subtraction $\overline{\text{MS}}$
- Momentum subtraction MOM
- On-shell renormalization OS (\rightarrow QED)

Wick rotation

$$t \rightarrow i\tau$$

A WICK rotation is a method of finding a solution to a mathematical problem in MINKOWSKI space from a solution to a related problem in EUCLIDEAN space by means of a transformation that substitutes an imaginary-number variable for a real-number variable.

turns a MINKOWSKIAN (momentum) space into a EUCLIDEAN one.

8.3 Beta function

The beta function $\beta(\alpha)$ encodes the dependence of a coupling parameter α on the energy scale μ of a given physical process described by quantum field theory.

$$\beta(\alpha) = \frac{d\alpha}{d \ln \mu} \quad (8.11)$$

“**running coupling constant**” β depends on the energy scale μ implicitly over the coupling constant α .

asymptotically free β -function negative (not for fermions!)

\rightarrow asymptotical freedom in QCD

(quantum) anomaly failure of a symmetry of a theory’s classical action to be a symmetry of any regularization of the full quantum theory

8.4 Lagrangians

complex scalar field EULER-LAGRANGE equations \equiv KLEIN-GORDON equation

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \quad (8.12)$$

Dirac fields EULER-LAGRANGE equations \equiv DIRAC equation

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \quad (8.13)$$

electromagnetic fields EULER-LAGRANGE equations \equiv MAXWELL equations

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (8.14)$$

8.5 Eichfeldtheorien

8.6 Quantum statistical mechanics

8.7 Propagators

photon propagator
mass / massless
...

9 Path integrals

9.1 Grassmann variables

9.2 Functional determinants

9.3 Gauge fixing

10 QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = c\bar{\psi} (i\hbar\cancel{\partial} - e\cancel{A} - mc) \psi - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (10.1)$$

10.1 Relativity

POINCARÉ - Transformation

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (10.2)$$

D'ALEMBERT operator

$$\square = \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \quad (10.3)$$

10.1.1 Klein-Gordon Equation

→ describes charged scalar particles

$$(\square + m^2) \psi = 0 \quad (10.4)$$

10.2 DIRAC Gleichung

→ beschreibt freie Fermionen (Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen)

↔ AKT II Skript S. 34

Kovariante Formulierung

$$(i\hbar\cancel{\partial} - mc\mathbb{1}) \Psi(x) = 0 \quad \text{mit } \cancel{\partial} = \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \quad (10.5)$$

Dirac slash

$$\cancel{\partial} = \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \quad (10.6)$$

10.2.1 Gamma Matrizen

Die Gamma Matrizen $\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \gamma^m) = (\beta, \beta\alpha_m)$ erfüllen die CLIFFORD-Algebra

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (10.7)$$

und sind (anti-)hermitesch

$$(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0, \quad (10.8)$$

$$(\gamma^i)^{\dagger} = -\gamma^i. \quad (10.9)$$

Clifford-Algebra basis in 4 dimensions

- $\mathbb{1}$ (scalar)
- γ^{μ} (vector)
- $\frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$ ((antisymmetric) tensor)
- $\gamma^{\mu} \gamma^5$ (axial vector)
- γ^5 (pseudo-scalar)

In n (even) dimensions, where the dimension of Dirac matrices is $2^{\frac{n}{2}}$, an analogous → move to group theory decomposition is possible because $1 + n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n = (2^{\frac{n}{2}})^2$.

Dirac adjoint

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (10.10)$$

$$\boxed{\bar{\psi} \left(i\hbar \overleftarrow{\partial} - mc \right) = 0} \quad (10.11)$$

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (10.12)$$

Chirality

$$P_{\text{left}} = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \quad (10.13)$$

$$P_{\text{right}} = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \quad (10.14)$$

$\psi_{\text{right}} = P_{\text{right}}\psi$ and $\psi_{\text{left}} = P_{\text{left}}\psi$ are eigenstates of γ^5 with eigenvalues $+1$ and -1 , respectively.

Helicity

$$\Sigma^i = \sigma^i \oplus \sigma^i \quad (10.15)$$

10.2.2 Dirac Matrizen

$$\boxed{[c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + \beta mc^2] \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t)} \quad (10.16)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (10.17)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (10.18)$$

$$(\alpha_i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \quad (10.19)$$

Dirac Representation

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} = \gamma^0, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.20)$$

where σ^i are the PAULI matrices.

→ PAULI-Matrizen
12.8.4

Weyl Representation or chiral representation

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

Majorana Representation

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

10.2.3 Weyl equation

With mass put to zero, the DIRAC equation in the chiral representation can be written with $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}$, or $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$ as

Describes massless neutrinos in *theory of weak interaction*.

$$(p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \phi = 0, \quad (10.23)$$

$$(p^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \chi = 0 \quad (10.24)$$

10.3 Electrodynamics

The four-vector potential A^μ can be written as $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ and the electric charge and current as $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$

Define a *field strength tensor* which is antisymmetric in μ, ν

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (10.25)$$

with the electric field $E_i := F_{i0}$ and the magnetic field $B_k := \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{ij}$.
Inhomogeneous MAXWELL equations

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \quad (10.26)$$

Homogeneous MAXWELL equations

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \text{with } \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho} \quad (10.27)$$

Gauge freedom A^μ is determined only up to local gauge transformations $\delta A^\mu = \partial^\mu \Lambda(x)$, which leave $F_{\mu\nu}$ invariant.

10.4 Coupling the Dirac field to electrodynamics

Conversely, the DIRAC field can be coupled to the electromagnetic field by the “minimal” substitution (also known as *covariant derivative*) $D_\mu \rightarrow \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu$, leading to

$$\boxed{(i\hbar\cancel{D} - e\mathcal{A}(x) - mc)\psi(x) = 0} \quad (10.28)$$

The arbitrariness of the gauge potential A due to gauge transformations $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)$ can be compensated by a local phase rotation $\psi(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\psi(x)$.

→ (abelian) gauge group $U(1) \subset$ YANG-MILLS-theory

10.4.1 Noether Current

$$j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (10.29)$$

$$j^\mu = c \begin{pmatrix} \bar{\psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi \end{pmatrix}$$

10.5 Group theory knowledge for QED

The Clifford algebra relation $\{A_i, A_j\} = 2q_{ij}\mathbb{1}$ with q_{ij} a symmetric $n \times n$ matrix and n even has precisely one equivalence class of irreducible representations of dimension $2^{\frac{n}{2}}$.

two-valued representations This two-valuedness of the spinor representation of the rotation group is inherited by the full Lorentz group (with all complications coming solely from the rotations). In group theory language: the spinor representation is a one-valued representation of the group $SU(2)$, which is the universal (2 : 1) covering group of $SO(3)$. The covering group of the (component of unity) of the Lorentz group $SO_0(3, 1) \supset SO(3)$ is the group $SL(2, \mathbb{C}) \supset SU(2)$. For more details see SEXL/URBANTKE: Relativität, Gruppen, Teilchen (Springer Verlag).

Schur's lemma If a matrix commutes with all elements of a matrix representation of a group, then either it is proportional to the unit matrix or this representation is reducible.

11 QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = c\bar{\psi} (i\hbar\cancel{\partial} - \bar{g}\mathcal{A} - mc\mathbb{1}) \psi - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{\bar{g}^2} \text{tr}_c (\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) \quad (11.1)$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + i[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu] \quad (11.2)$$

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \frac{\bar{g}}{\hbar} A_a^\mu(x) t_a$$

$$\psi \equiv \psi_{i_c} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4 \text{ und } c = r, g, b$$

11.1 Eichtransformationen

$$g(x) = e^{i\varphi(x)}$$

11.1.1 Eichsymmetrien

$U(1)$

$$\varphi(x) = \frac{e}{\hbar} \chi(x)$$

↑ move to Symmetrie-kapitel

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(x)} \psi(x)$$

$SU(3)$

$$\varphi(x) = \frac{\bar{g}}{\hbar} \theta_a(x) t_a$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{F}'^{\mu\nu} = g(x) \mathcal{F}^{\mu\nu} g^{-1}(x)$$

$$\mathcal{A}^\mu \rightarrow \mathcal{A}'^\mu = g(x) (\mathcal{A}^\mu - i\partial^\mu) g^{-1}(x)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = g(x) \psi$$

$$D^\mu = \partial^\mu + i\mathcal{A}^\mu(x) \rightarrow D'^\mu = g(x) D^\mu g^{-1}(x)$$

infinitessimale Eichtransformation $g \sim 1 + i\delta\varphi(x)$

$$\delta\ominus = \ominus' - \ominus \quad \text{mit } \ominus' \equiv g(x) \times \ominus,$$

wobei z.B.: $\ominus = A^\mu$ oder $\ominus = \psi$.

lokale Eichtransformation

$$\chi = \chi(x)$$

globale Eichtransformation

$$\chi = \chi(x) = \text{const.}$$

Eichinvarianz $F^{\mu\nu}$, SCHRÖDINGER-Gleichung, DIRAC-Gleichung, LAGRANGians

Kovariante Ableitung Differenz zweier infinitesimal benachbarter Feldvektoren (nur durch Koordinaten beschrieben)

11.2 Gluonen und Quarks

Erhaltene Ströme werden von Quarks und Gluonen erzeugt.

Alle Quarkarten haben dieselbe Größe der Farbladung \bar{g} (freier Parameter der QCD). Wechselwirkung der Quarks nicht direkt, sondern über Gluonen.

Gluonen haben eine Farbladung \bar{g} und sind selbst Quellen (i.e. beeinflussen sich selbst) der (elektrischen und magnetischen) Farbfelder. Gluonen ändern die Ladung der Quarks (z.B.: gelb \rightarrow blau, ...).

Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron über (farbneutrale) Pionen.

Multiplett (Irreduzible Darstellung) Mehrere Teilchen haben (näherungsweise) dieselbe Energie.

Reduzible Multiplets → Untermultiplets

$$2 \otimes 2 = 4 = 3 \oplus 1$$

Symmetrie Falls es einen antisymmetrischen Zustand im Multiplet gibt, sind alle Zustände im Multiplet antisymmetrisch.

12 Gruppentheorie

12.1 Gruppen

Gruppe $\langle G, \circ \rangle$

1. Die Gruppe G hat ein **Gruppenprodukt** \circ und ist bezüglich diesem abgeschlossen, i.e. $\circ : G \times G \rightarrow G$. Es entspricht dem Hintereinanderausführen der Elemente der Gruppe.
2. Einheitselement
3. Inverse
4. Assoziativgesetz
5. Für eine **abelsche Gruppe** gilt zusätzlich ein Kommutativgesetz

Beispiele: Vektorraum

12.1.1 Abbildungen zwischen Gruppen

Homomorphismus	Abbildung φ zwischen zwei Gruppen mit $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$
Monomorphismus	φ injektiv
Epimorphismus	φ surjektiv
Isomorphismus	φ bijektiv
Endomorphismus	Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow G$
Automorphismus	Isomorphismus $\varphi : G \rightarrow G$

12.1.2 Wirkung und Darstellung

Darstellung einer Gruppe quadratische Matrizen, die den selben Multiplikationsregeln gehorchen, wie die Gruppenelemente. Steckt in den Matrixoperationen die gesamte Information der Gruppe, dh. ist das Gruppenprodukt auf eine Matrixmultiplikation rückführbar, dann spricht man von einer **treuen Darstellung**.

Adjungierte Wirkung von x auf H : $Ad_x h = x h x^{-1}$

homöomorph	Punktmengen mit bijektiver Abbildung
homotop	2 Wege durch stetige Deformation ineinander überführbar

Derivation

- linear
- Leibnizregel

12.2 Lie-Gruppe

Der zugrunde liegende topologische Raum ist eine Mannigfaltigkeit.

12.3 Lie-Algebra

linearer Raum. Zwei Elementen A, B wird ein Element $[A, B]$ zugeordnet.

Die LIE-Algebren homomorpher LIE-Gruppen sind homomorph.

Darstellung D einer LIE-Algebra

$$D([x, y]) = D(x)D(y) - D(y)D(x)$$

12.3.1 Generatoren

12.3.2 Kommutatorrelation

$$[-iT_1, -iT_2] = \text{reeller Vorfaktor} \cdot \varepsilon_{123}(-iT_3) \tag{12.1}$$

reduzible und irreduzible Darstellung **reduzibel:** Matrizen können in Blockdiagonalform gebracht werden

irreduzibel: Zustände durch die Generatoren der Gruppe ineinander überführbar

Casimir-Operator vertauscht mit allen Elementen der Gruppe (\rightarrow Algebra)

12.3.3 (Lie-)Algebra

Eine Algebra bildet einen *Vektorraum* mit einer multiplikativen Verknüpfung, die wieder in der Algebra liegt.

Spezialfall Lie-Algebra $[A, B]$ liegt wieder in der LIE-Algebra, $A \cdot B$ jedoch nicht (zwingend).

Die Algebra bildet den Tangentialraum zur dazugehörigen Gruppe.

12.3.4 Quaternionen

$$[-iT_i, -iT_j] = \underbrace{1}_{\in \mathbb{R} \Rightarrow \text{liegt in Algebra}} \varepsilon_{ijk}(-iT_k)$$

Q: Wann liegt das Produkt (ie. Kommutator einer Lie-Algebra) wieder in der Algebra? wenn **der Vorfaktor in der Kommutatorrelation reell** ist?
 \rightsquigarrow Pfadintegrale in der QM: Kapitel 1

12.3.5 Spezielle Gruppen und Algebren

wichtige Gruppen im Standardmodell

- SO(3) Drehgruppe
- SO(3,1) LORENTZ-Gruppe
- U(1)
- SU(2)
- SU(3)
- SL(n) spezielle lineare Gruppe: n -dimensionale Matrizen mit $\det = 1$
- GL(n) allgemeine lineare Gruppe n -dimensionale Matrizen mit $\det \neq 0$

12.4 Gruppe aus Algebra

(mit der Einheit stetig verbundener Teil)

12.4.1 Exponentiation von Matrizen

Die Exponentiation der Matrix A ist definiert über

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \quad (12.2)$$

wobei A^n das n -fache Produkt der Matrix A mit sich selbst ist.

Falls $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ eine *Diagonalmatrix* ist, gilt $A^n = \text{diag}(a_{11}^n, \dots, a_{nn}^n)$ und damit

$$e^A = e^{\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})} = \text{diag}(e^{a_{11}}, \dots, e^{a_{nn}}) \quad (12.3)$$

→ Anwendung: Gruppe aus Algebra

12.4.2 Baker-Campell-Hausdorff Formel

$$e^X e^Y = e^{X+Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \dots}$$

12.5 Produkte von Gruppen

12.5.1 Kartesisches Produkt

(Mengenprodukt)

$$A \times B$$

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$$

Beispiele

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- ...

12.5.2 Direktes Produkt

like Cartesian product, but with some additional structure, i.e. A, B carry some algebraic structure (e.g. they are groups, etc.)

12.5.3 Direkte Summe

$$A \oplus B$$

if the number of operands is finite, it is the same thing as a direct product

\oplus eine Komponente kann 0 sein: $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$

12.5.4 Tensorprodukt

Tensorprodukt von Vektorräumen V und W

$$V \otimes W.$$

Die Dimension von $V \otimes W$ ist gleich dem Produkt der Dimensionen von V und W

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ c \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & d \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \otimes (e \ f \ g \ h) = \begin{pmatrix} ae & af & ag & ah \\ be & bf & bg & bh \\ ce & cf & cg & ch \end{pmatrix} = \quad (12.5)$$

\otimes immer beide Komponenten: $T_i = T_i^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)} + \mathbb{1}^{(1)} \otimes T_i^{(2)}$

12.6 Darstellungstheorie

Gruppenelement	$\overset{\text{isomorph}}{\simeq}$	Matrixdarstellung
----------------	-------------------------------------	-------------------

$M(g)$ sei die Matrixdarstellung des Gruppenelements g .

$$g_1 g_2 = g_3 \quad \longleftrightarrow \quad M(g_1)M(g_2) = M(g_3)$$

Interesting relations

- $U(2)$ is locally isomorphic to $U(1) \times SU(2)$ (gilt nur lokal in der Umgebung eines Gruppenelementes)
- $SO(4)$ is locally isomorphic to $SO(3) \otimes SO(3)$
- $SO(3)$ is locally isomorphic to $SU(2)$
- $SO(3, 1)$ is locally isomorphic to $SU(2) \otimes SU(2)$
- The LORENTZ group $SO(3, 1)$ can be seen as the “analytic continuation” of the rotation group $SO(4)$

→ Anthony ZEE: QFT
in a Nutshell p.464

12.7 SO(n)

The special orthogonal group consists of all $n \times n$ real matrices O that

- are orthogonal, i.e.

$$\boxed{O^T O = \mathbb{1}} \quad (12.6)$$

- have unit determinant, i.e.

$$\boxed{\det O = 1} \quad (12.7)$$

SO(n) consists of rotations in n -dimensional EUCLIDEAN space.

12.7.1 Fundamental (or Defining) Representation

An n -component vector transforms under the action of the group element O^{ij} as

$$v^i \rightarrow v'^i = O^{ij} v^j$$

tensors transform *as if* they are equal to the product of vectors ($n^{\# \text{ of indices}}$ objects being scrambled together by the action of O)

tensors furnish representations of the group

the number of objects in a tensor is called the *dimension of the representation*

12.7.2 Reducible Representation Example

e.g. tensor T^{ij} can be split into symmetric $S^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$ and antisymmetric combinations $A^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})$

- S^{ij} : $\frac{n(n+1)}{2}$ objects
- A^{ij} : $\frac{n(n-1)}{2}$ objects
- T^{ij} : n^2 objects

S^{ij} 's and A^{ij} 's transform among themselves \Rightarrow the representation furnished by T^{ij} is said to be *reducible*.

Representations that do not break apart are called *irreducible*.

The symmetry properties of a tensor under permutation of its indices is not changed by the group transformation, i.e. the indices on a tensor transform independently.

trace if T^{ij} is symmetric, then $T = \delta^{ij} T^{ij}$ is called the trace. The trace T transforms into itself.

Summary A tensor T^{ij} (that transforms like $v^i v^j$) can be decomposed into

$$\mathbf{SO(3)} \quad 3 \otimes 3 = 5 \oplus 1 \oplus 3$$

- a symmetric traceless tensor
- a trace
- and an antisymmetric tensor

$$n \otimes n = \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \oplus 1 \oplus \frac{n(n-1)}{2} \quad (12.8)$$

12.7.3 Naming conventions for representations

n is the number of indices on the tensor furnishing the representation.

- dimension \boxed{n}
- symmetric $\boxed{\{n\}}$
- antisymmetric $\boxed{[n]}$

$$\mathbf{SO(3)} \quad \{1\} \otimes \{1\} = \{2\} \oplus \{0\} \oplus [2]$$

Bemerkung $[1] = \{1\}$ *Bemerkung* $2 [m] = [n - m]$

SO(3) the antisymmetric 2-index tensor (cross product) is equivalent to the vector

12.7.4 Algebra

Any orthogonal matrix can be written as $O = e^A$.

A is real and antisymmetric (from (12.6) and (12.7); traceless as well?). Let $A = \theta^{ij} (iJ^{ij})$.

$$O = e^{i\theta^{ij} J^{ij}}$$

- J^{ij} denotes the rotation around the (i, j) -axis
- J^{ij} has matrix components $(J^{ij})^{kl}$ in the k -th row and l -th column
- $J^{ij} = -J^{ji}$
- J^{ij} is purely imaginary and antisymmetric $\Rightarrow J^{ij}$ is **hermitean**
- $[J^{ij}, J^{kl}]$ is antihermitean
- $\Rightarrow [J^{ij}, J^{kl}]$ can be written as a linear combination of the iJ 's

(12.9) $\overline{\text{imaginary and anti-symmetric } (\neq) \Rightarrow \text{hermitean}}$
 $i \times \text{hermitean} = \text{antihermitean}$

$$[J^{ij}, J^{kl}] = i(\delta^{ik} J^{jl} - \delta^{jk} J^{il} + \delta^{jl} J^{ik} - \delta^{il} J^{jk})$$

(12.10)

SO(3): $J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} J^{jk}$

12.8 SU(n)

The special unitary group consists of all $n \times n$ real matrices U that

- are unitary, i.e.

$$\boxed{O^\dagger O = \mathbb{1}} \quad (12.11)$$

- have unit determinant, i.e.

$$\boxed{\det O = 1} \quad (12.12)$$

12.8.1 Fundamental (or Defining) Representation

The object φ^i (covariant vector) transforms under the action of the group element U_j^i as

$$\varphi^i \rightarrow \varphi'^i = U_j^i \varphi^j$$

Taking the complex conjugate

$$\varphi_i \rightarrow \varphi'_i = (U^\dagger)_i^j \varphi_j$$

with $(U_j^i)^* = (U^\dagger)_i^j$ and φ_i (contravariant vector) transforming in the same way as $(\varphi^i)^*$ (though they are not equal).

Upper and lower indices due to the possibility of complex conjugation in $SU(n)$.

12.8.2 Irreducible Representations of SU(n)

Traceless tensors with definite symmetry properties under permutation of upper indices or under permutation of lower indices.

SU(5)

- φ^i $5 = n$
- φ^{ij} $10 = \frac{n(n-1)}{2}$ (antisymmetric)
- φ^{ij} $15 = \frac{n(n+1)}{2}$ (symmetric)
- φ^i_j $24 = n^2 - 1$ (\rightarrow adjoint representation)
- φ^{ij}_k $45 = \frac{n^2(n-1)}{2} - n$ (antisymmetric in upper indices)

Adjoint representation

$$\varphi \rightarrow \varphi' = U \varphi U^\dagger$$

If φ is hermitean and traceless $U \varphi U^\dagger$ is also hermitean and traceless. (If φ is antihermitean, take $i\varphi$)

12.8.3 Naming conventions

- the representation furnished by a tensor with m upper and n lower indices.

- $\boxed{(m, n)}$

- dimension of the tensor

- \boxed{N} mostly upper indices

- $\boxed{N^*}$ mostly lower indices

- $\boxed{[N, 0]}$ or short $\boxed{[N]}$ antisymmetric upper indices

- $\boxed{[0, N]^*}$ or short $\boxed{[N]^*}$ antisymmetric lower indices

12.8.4 Algebra

Any unitary matrix can be written as $U = e^{iH}$ with H hermitean and traceless (from (12.11) and (12.12))

There are $N^2 - 1$ generators T^a in $SO(n)$ with

$$\boxed{U = e^{i\theta^a T^a}} \quad (12.13)$$

- $[T^a, T^b]$ is antihermitean and traceless
- $[T^a, T^b]$ can be written as a linear combination of the T^a 's

$$\boxed{[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c} \quad (\text{LIE algebra of } SU(n)) \quad (12.14)$$

The f^{abc} are known as the *structure constants*.

$$\mathbf{SU(2)} \quad f^{abc} = \varepsilon^{abc}$$

Consider an infinitesimal transformation $U \simeq 1 + i\theta^a T^a$

Special cases

◦ **SU(2)**

- It suffices to consider only tensors with upper indices, all symmetrized (because the antisymmetric symbols ε^{ij} and ε_{ij} carry two indices).
- **SU(2)** only has *real* and *pseudoreal* representations, but no *complex* representations.

◦ **SU(3)**

- It suffices to consider only tensors with all upper indices symmetrized and all lower indices symmetrized (because the antisymmetric symbols ε^{ijk} and ε_{ijk} carry three indices).

A *pseudoreal* representation is equivalent to its complex conjugate upon a similarity transformation.

SU(2)

- Drehungen (Spin)
- $d = 3$
- isomorphic to a 2-sphere, i.e. $SU(2) \simeq S^3$
- $UU^\dagger = \mathbb{1}_n$ bzw. $U^\dagger = U^{-1}$
- $\det U = 1$

su(2)

- 2×2 -Matrizen T_i
- hermitesch, i.e. $T_i^\dagger = -T_i$
- spurlos, i.e. $\text{tr}(T_i) = 0$

Pauli Matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Properties

- hermitean: $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$
- unitary: $\sigma_i^\dagger \sigma_i = \mathbb{1}$
- square to one: $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$
- vanishing trace: $\text{tr}(\sigma_i) = 0$
- determinant: $\det(\sigma_i) = -1$
- cyclic: $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k$
- anticommutator: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$
- commutator: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$
- special relation

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (12.15)$$

- RODRIGUES formula

$$e^{i\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1}_2 \cos(\alpha) + i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha) \quad (12.16)$$

(irreduzible) Darstellungen

- 1×1 -Matrizen: Spin-0
- 2×2 -Matrizen: Spin- $\frac{1}{2}$ (definierende Darstellung, komplex)
- 3×3 -Matrizen: Spin-1 (Vektordarstellung, reell)
- 4×4 -Matrizen: Spin- $\frac{3}{2}$

SU(3)

- $d = 8$
- isomorphic to a 3-sphere, i.e. $SU(2) \simeq S^3$
- $UU^\dagger = \mathbb{1}_n$ bzw. $U^\dagger = U^{-1}$
- $\det U = 1$

su(3)

Gell-Mann Matrices

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & (12.17) \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

12.8.5 Multiplying representations together

Example The operation of multiplying two representations together is of fundamental importance in *quantum field theory*, when multiplying fields together to construct the LAGRANGEian.

- Given two tensors of $SU(n)$:
 - φ with m upper and n lower indices
 - η with m' upper and n' lower indices
- Consider a tensor T with $(m + m')$ upper and $(n + n')$ lower indices that transforms in the same way as the product $\varphi\eta$.
- Contract with the antisymmetric $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ or $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$.
- Separate out traces.

12.8.6 Restriction to subgroup

The $SU(3)$ transforms the three quarks u , d and s into linear combinations of each other. It contains as a subgroup the isospin $SU(2)$, which transforms u and d , but leaves s alone.

$SU(3)$ contains $SU(2) \otimes U(1)$
supset $SU(2)$.

All representations may be built up as products of the fundamental representation.

Once we know how the fundamental representation decomposes, we know how all representations decompose.

13 Topologie

14 (Differential) Geometry

14.1 Riemannsche Mannigfaltigkeit

15 General Relativity

Teil III

Grand Unified Theories

16 Fundamental Physics

what is *fundamental*?

Teil IV

Anhang

A Important topics

Lösung wichtiger (Differential-)Gleichungen der theoretischen Physik:

- Wärmeleitungsgleichung $\partial_t A = D \cdot \partial_x^2 A$
- Wellengleichung $\partial_t^2 A = \frac{1}{c^2} \cdot \partial_x^2 A$
- ...
- Jacobimatrix Allgemein

→ Prama2 und Ana2

A.1 Solving Differential equations

A.1.1 Integrating Factor

A.1.2 Trennung der Variablen

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \quad (\text{A.1})$$

$$g(x(t)) dx(t) = h(t) dt \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} g(x) dx = \int_0^t h(t) dt \quad (\text{A.3})$$

$$G(x(t)) - G(x_0) = H(t) \quad (\text{A.4})$$

$$\Rightarrow x(t) = G^{-1}(G(x_0) + H(t)) \quad (\text{A.5})$$

A.2 Hilfreiche Integrale

A.2.1 Integration Path

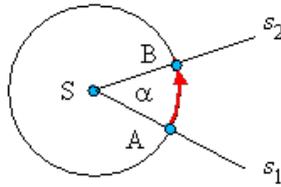


Abbildung 1: Usually we integrate over areas in the mathematically positive way.

A.2.2 Partielle Integration

Aus der Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} \overset{\rightsquigarrow}{f'} \cdot g \, dx = \underbrace{f \cdot g}_{\text{Randterm}} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f \cdot g' \, dx$$

Damit wird die Ableitung der einen Funktion quasi auf die andere Funktion transferiert.

A.2.3 Winkelintegral

→ Variationsrechnung

$$\int_0^\pi f(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \int_{-1}^1 f(\cos \vartheta) \, d(\cos \vartheta)$$

A.2.4 Gerade und ungerade Funktionen

Sei $g(x)$ eine **gerade Funktion**, dann gilt $g(-x) = g(x)$ und $u(x)$ sei eine **ungerade Funktion** mit $u(-x) = -u(x)$.

gerade Funktion × **gerade Funktion** = **gerade Funktion**

ungerade Funktion × **ungerade Funktion** = **gerade Funktion**

gerade Funktion × **ungerade Funktion** = **ungerade Funktion**

Integration

$$\int_{-L}^L \text{gerade Funktion} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \text{gerade Funktion} \, dx$$

$$\int_{-L}^L \text{ungerade Funktion} \, dx = 0$$

A.2.5 Integral über Gauß-Funktionen

→ Statistische Physik
Formelsammlung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a^{-\frac{m}{2}} \quad \text{mit } m \text{ gerade}$$

Spezialfall eines GAUSS-Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

GAUSS-Integral mit quadratischer Ergänzung: b, c real and $c > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} e^{\pm ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-b^2/4c}$$

A.2.6 Gamma Funktion $\Gamma(x)$

→ Statistische Physik
Formelsammlung

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} e^{-t} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

A.2.7 Formel von Stirling

sei $x \rightarrow \infty$ und $y = \text{const.}$, dann gilt

→ Statistische Physik
Formelsammlung

$$\Gamma(x+y) \rightarrow \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}+y}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \rightarrow \sqrt{2\pi} e^{-n} n^n n^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

A.2.8 Riemann Zeta Funktion $\zeta(z)$

→ thQFT

A.3 Volumen und Oberfläche einer D-dimensionalen Kugel

sei R_0 der Radius einer Kugel im \mathbb{R}^D , dann ist ihr Volumen, $V(R_0)$, gegeben durch

$$V(R_0) = \int_0^{R_0} r^{D-1} dr \cdot \int_{\Omega_D} d\Omega_D = \frac{R_0^D}{D} \cdot \Omega_D = \frac{R_0^D}{D} \cdot \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

wobei Ω_D die Oberfläche dieser Kugel ist.

B Taylor series expansions

General Taylor series expansion at point $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^n \quad (\text{B.1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + \dots$$

Exponential function:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{for all } x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{for all } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \text{for all } x$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad \text{for } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots \quad -1 < u < 1$$

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots \quad -\infty < u < +\infty$$

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad -\infty < u < +\infty$$

$$\sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad -\infty < u < +\infty$$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + \dots \quad -1 < u \leq 1$$

$$(1+u)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} u^n \quad -1 < u < 1$$

C Important Derivatives

Product rule

$$\frac{d}{dx} [a(x) \cdot b(x)] = \frac{da(x)}{dx} \cdot b(x) + a(x) \cdot \frac{db(x)}{dx}$$

Quotient rule

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{a(x)}{b(x)} \right] = \frac{\frac{da(x)}{dx} \cdot b(x) - a(x) \cdot \frac{db(x)}{dx}}{b(x)^2}$$

Trigonometric functions

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Inverse trigonometric functions

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Hyperbolic functions

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = 1 - \tanh^2 x$$

D Kugelkoordinaten

D.1 Definition

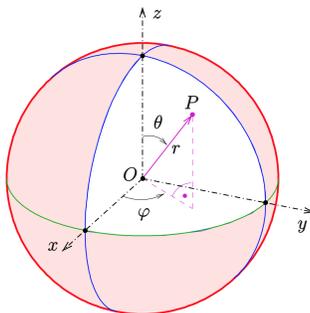


Abbildung 2: Kugelkoordinaten r , ϑ , φ eines Punktes im kartesischen Koordinatensystem.

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi & \vartheta &= \arccos \frac{z}{r} \\ z &= r \cos \vartheta & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\in (-\infty, \infty) & r &\in [0, \infty) \\ y &\in (-\infty, \infty) & \vartheta &\in [0, \pi) \\ z &\in (-\infty, \infty) & \varphi &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Raumwinkel (+Integration)

$$d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \Omega = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi$$

Funktionaldeterminante (Determinante der Jacobi-Matrix)

$$\det \left(\frac{d(x, y, z)}{d(r, \vartheta, \varphi)} \right) = r^2 \sin \vartheta$$

Volumsintegral

$$\int_{r=0}^{\infty} r^2 \, dr \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \, f(r, \vartheta, \varphi)$$

Laplace

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Gradient

$$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix}$$

Curl

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \end{pmatrix}$$

E Zylinderkoordinaten

E.1 Definition

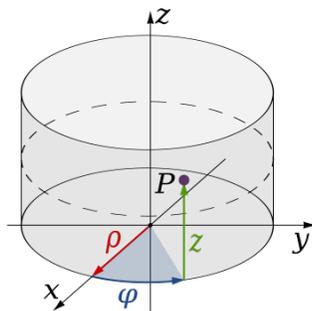


Abbildung 3: Zylinderkoordinaten ρ , φ , z eines Punktes im kartesischen Koordinatensystem.

$$\begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi & \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = \rho \sin \varphi & \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z & z = z \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty, \infty) & \rho \in [0, \infty) \\ y \in (-\infty, \infty) & \varphi \in [0, 2\pi) \\ z \in (-\infty, \infty) & z \in (-\infty, \infty) \end{array}$$

Funktionaldeterminante (Determinante der Jacobi-Matrix)

$$\det \left(\frac{d(x, y, z)}{d(\rho, \varphi, z)} \right) = \rho$$

Volumsintegral

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \rho \, d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=-\infty}^{\infty} dz \, f(\rho, \varphi, z)$$

Laplace

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Gradient

$$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f$$

Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix}$$

Curl

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \end{pmatrix}$$

F Polarkoordinaten

F.1 Definition

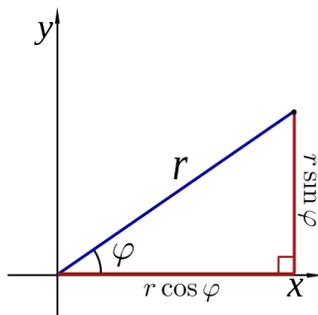


Abbildung 4: Polarkoordinaten r, φ eines Punktes im kartesischen Koordinatensystem.

$$\begin{array}{ll} x = r \cos \varphi & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r \sin \varphi & \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty, \infty) & \rho \in [0, \infty) \\ y \in (-\infty, \infty) & \varphi \in [0, 2\pi) \end{array}$$

Funktionaldeterminante (Determinante der Jacobi-Matrix)

$$\det \left(\frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, z)} \right) = r$$

Flächenintegral

$$\int_{\rho=0}^{\infty} r \, dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \, f(r, \varphi)$$

G Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (\text{G.1})$$

G.1 Product-to-Sum Formulas

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \quad (\text{G.2})$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \quad (\text{G.3})$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \quad (\text{G.4})$$

$$\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \quad (\text{G.5})$$

G.2 Power-Reducing / Half Angle Formulas

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (\text{G.6})$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (\text{G.7})$$

G.3 Double Angle Formulas

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad (\text{G.8})$$

H Spezielle Funktionen

- Kugelflächenfunktionen
- LEGENDRE Polynome
- LAGUERRE Polynome
- Hermitpolynome
- LIOUVILLE DGL
- ...

Form der Differentialgleichung → Lösung

Spezielle Funktionen + Vorkommen

H.0.1 Entwicklung nach vollständigen Funktionensystemen

→ EDyn I

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(x) \quad (\text{H.1})$$

$$a_n = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} Z_n(x) f(x) dx \quad (\text{H.2})$$

zum Beispiel Entwicklung nach den LEGENDRE-Polynomen P_ℓ^m

→ Numerische Methoden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_\ell P_\ell^0(x) \quad (\text{H.3})$$

$$c_\ell = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell^0(x) f(x) dx \quad (\text{H.4})$$

H.1 Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)

$$\boxed{Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \text{something} \times \text{LEGENDRE-Polynom}} \quad (\text{H.5})$$

$$\begin{aligned} Y_{00}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{1\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_{20}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_{2\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_{2\pm 2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} \end{aligned}$$

H.2 Legendre Funktionen / -polynome

Legendre-Polynome $P_l(\cos \theta)$ vom Grad l

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1 \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) &= \end{aligned}$$

I Fun with Definitions

I.1 Morphisms

Homomorphism

- “same form” / “same shape”
- structure-preserving map (in algebra)

Isomorphism

- “equal form” / “equal shape”
- bijective
- Two mathematical objects are isomorphic if an isomorphism exists between them.

Homeomorphism

- \rightsquigarrow topology: morphisms are continuous functions
- isomorphisms are also called homeomorphisms
- ... between topological spaces
- preserve all the topological properties of a given space
- the homeomorphism is a continuous stretching and bending of the object into a new shape
- **example:** a square and a circle are homeomorphic to each other, but a sphere and a torus are not
- local homeomorphism: preserves local structure

Diffeomorphism

- \rightsquigarrow mathematical analysis: morphisms are differentiable functions
- isomorphisms are also called diffeomorphisms
- \rightsquigarrow topology
- \rightsquigarrow Lie algebra
- isomorphism of smooth manifolds
- **specific to Gravity:** diffeomorphism acting on black hole or other “region”
 - small diffeomorphisms: coordinate changes that do not affect the boundary metric or the physical state
 - continuously connected to $\mathbb{1}$
 - large diffeomorphisms
 - proper: local gauge transformation falls off sufficiently fast near boundary

see GaHilD I notes,
16.10.2018

Holomorphic

- holomorphic function
- a complex-valued function of one or more complex variables that is, at every point of its domain, complex differentiable in a neighborhood of the point
- analytic function is often used interchangeably

Antiholomorphic

- holomorphic $f(z), \zeta(\varepsilon^+)$
- antiholomorphic $f(\bar{z}), \zeta(\varepsilon^-)$

I.2 Holonomy

- real (complex) vector bundle over real (complex) connected manifold with connection

holonomic

- “compareable”
- holonomic coordinates (or basis)

anholonomic

- “non compareable”
- anholonomic coordinates (or basis)

I.3 Homology

- making a cardboard model of a manifold
- $\partial^2 = 0$

I.4 Cohomology

- dual to homology
- de Rham cohomology
- forms, exterior derivative, Hodge star, ...
- $d^2 = 0$

I.5 Homotopy

Homotopy

- “same/similar place”
- \rightsquigarrow topology
- equivalence relation
- a continuous functions from one topological space to another can be “continuously deformed” into another
- continuous deformation (from one function to another, rather than one space to another)
- leads to a relation of spaces

Isotopy

- deformation in visualizing homeomorphism
- without cutting and regluing

J Abbreviations

i.e.	id est (“that is”)
e.g.	exempli gratia (“for the sake of an example”)
etc.	et cetera (“and so on”)
cf.	confer / conferatur (“compare”)
viz.	videlicet / videre licet (“it is permitted to see”, “namely”, “that is to say”, “as follows”)